

УДК 539.31+62-50

М.Х. Тешаев

Бухарский инженерно-технологический институт

Республика Узбекистан, 105017, Бухара, ул. К. Муртазаева, 15
muhsin_5@mail.ru; Muhsin.Teshayev@rambler.ru;
+998-65-2229490

ОТЫСКАНИЕ СТРУКТУРЫ РЕАКЦИЙ СЕРВОСВЯЗЕЙ СИСТЕМ, СТЕСНЕННЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ И КИНЕМАТИЧЕСКИМИ СВЯЗЯМИ

Рассматриваются вопросы составления уравнений движения и определения явного вида сил реакций систем, стесненных сервосвязями. С учетом параметрического освобождения системы от сервосвязей получен явный вид уравнений движения и сил реакций сервосвязей.

Ключевые слова: сервосвязь; (А)-перемещение; параметрическое освобождение; уравнения движения; силы реакций сервосвязей.

Введение

В работах [1–6] рассматривались вопросы составления уравнений движения и определения структуры сил реакций систем, стесненных сервосвязями. Однако, использование сервосистем для реализации сервосвязей недостаточно знание их структуры. Поэтому в этой работе рассматриваются составление явного вида уравнений движения систем, стесненных сервосвязями, и определение явного вида сил реакций сервосвязей.

Составление уравнений движения

Пусть на механическую систему, положение которой определяется обобщенными координатами $q_1, \dots, q_n$, наложены ограничения в виде обычных неголономных идеальных связей:

$$\sum_{i=1}^n b_{\beta i} \dot{q}_i + b_{\beta} = 0, \quad (\beta=1, \dots, b) \quad (1)$$

а также сервосвязей вида

$$\begin{aligned} F_{\alpha}(t, q_1, \dots, q_n) &= 0, \quad (\alpha = 1, \dots, a), \\ \psi_{\gamma}(t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) &= 0, \quad (\gamma = 1, \dots, c) \quad (a+c=\kappa). \end{aligned} \quad (2)$$

Следуя А. Бегену [1] предполагаем, что среди возможных перемещений, допускаемых связями (1) имеются такие, которые определяются независимыми уравнениями

$$\sum_{i=1}^n a_{\theta_2 i}(t, q_1, \dots, q_n) \delta q_i = 0, \quad (\theta_2 = 1, \dots, \kappa) \quad (3)$$

в которых реакции связей второго рода работы не производят [2]. Здесь (А)-перемещения [2] (3) должны дополнительно удовлетворять условиям (1).

Следуя А.Г. Азизову [4–6], введем независимые дополнительные параметры, соответствующие преобразованию систем с сервосвязями к виду:

$$\begin{aligned} F_{\alpha}^*(t, q_1, \dots, q_n, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_a) &= 0, \\ \psi_{\gamma}^*(t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, \xi_1, \dots, \xi_c) &= 0, \\ (\alpha=1, \dots, a; \quad \gamma=1, \dots, c; \quad a+c=\kappa), \end{aligned} \quad (4)$$

где η_p, ξ_{δ} – параметры, характеризующие освобождение системы соответственно от первой и второй групп уравнений (2).

Нулевые значения параметров η_p, ξ_{δ} и их производных $\dot{\eta}_p, \dot{\xi}_{\delta}$ соответствуют связям (2) и их продифференцированным формам. За эти величины могут быть взяты, например, левые части уравнений (2), вычисляемые на действительном движении системы (А.С. Галиуллин [7–10], Р.Г. Мухарлямов [11–14]).

Обозначив через N_p и P_δ принуждения реакций, относящиеся соответственно к параметрам η_p , ξ_δ , будем предполагать, что последние вынужденно изменяются согласно дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_p &= N_p, & (p=1, \dots, a), \\ \dot{\xi}_\delta &= P_\delta, & (\delta=1, \dots, c).\end{aligned}\quad (5)$$

Определяя работу принуждений на перемещениях $\delta\eta_p$, $\delta\xi_\delta$ выражением

$$\sum_{p=1}^a N_p \delta\eta_p + \sum_{\delta=1}^c P_\delta \delta\xi_\delta, \quad (6)$$

для параметрически освобожденной системы будем иметь

$$\delta A = \sum_{i=1}^n R_i^{(2)} \delta q_i + \sum_{p=1}^a N_p \delta\eta_p + \sum_{\delta=1}^c P_\delta \delta\xi_\delta. \quad (7)$$

Пусть из способа действия реакций связей второго рода следует, что на (А)-перемещениях работа реакций связей второго рода равна нулю как для неосвобожденной, так и для параметрически освобожденной систем.

Тогда при произвольных принуждениях реакций работа (7) обратится в нуль при условиях

$$\delta\eta_p=0; \quad \delta\xi_\delta=0, \quad (p=1, \dots, a; \delta=1, \dots, c).$$

С учетом первой группы уравнений (2), (4) вместо обобщенных координат $q_1, \dots, q_a$ введем параметры $\eta_1, \dots, \eta_a$.

Следуя В.С. Новоселову [15], введем независимые скоростные параметры e_v соотношениями, тождественно удовлетворяющими уравнениям (1) и второй группе уравнений (4):

$$\dot{Z}_i = \sum_{v=b+1}^n d_{iv} e_v + d_i, \quad (i=1, \dots, n),$$

где $Z_i = \dot{\eta}_i$, $(i=1, \dots, a)$, $Z_i = \dot{q}_i$, $(i=a+1, \dots, n)$, и за первые, $a+c=\kappa$ скоростные параметры e_v , выберем $\dot{\eta}_\alpha, \xi_\delta$.

Уравнения (3) в неголономных координатах будут иметь вид

$$\sum_{i=1}^n a_{\theta_2 i} \sum d_{iv} \delta\pi_v = \sum_{v=b+1}^n \tilde{a}_{\theta_2 v} \delta\pi_v = 0, \quad (\theta_2=1, \dots, \kappa) \quad (8)$$

где π_v – квазикоордината, соответствующая квазискорости (скоростному параметру) e_v .

Тогда из преобразованного общего уравнения динамики

$$\sum_{v=b+1}^n \left(\frac{\partial S}{\partial \dot{e}_v} \right) \delta \pi_v = 0$$

на (А)-перемещениях (8) получим уравнения движения с множителями сервосвязей

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{e}_v} = Q_v + \sum_{\theta_2=1}^{\kappa} \lambda_{\theta_2} \tilde{a}_{\theta_2 v}, \quad (v=b+1, \dots, n), \quad (9)$$

где S – энергия ускоренной системы. Уравнения (9) были получены А.Г. Азизовым [4–6].

При обозначениях:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_p &= x_p, & \xi_{\delta} &= x_{a+\delta} & \eta_p &= x_{\kappa+p}, \\ N_p &= \tilde{U}_p, & P_{\delta} &= \tilde{U}_{c+\delta} \end{aligned} \quad (10)$$

уравнения (5) будут иметь вид

$$\dot{x} = Ax + B\tilde{U}, \quad (11)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} O & O & O \\ O & O & O \\ E_a & O & O \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} E_a & O \\ O & E_c \\ O & O \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{c_1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{U} = \begin{pmatrix} \tilde{U}_1 \\ \vdots \\ \tilde{U}_{\kappa} \end{pmatrix},$$

здесь E_a – единичная субматрица, и $c_l = 2a+c$.

Система (10), согласно работам Н.Н. Красовского [16] и В.И. Зубова [17], вполне управляема и для нее могут быть поставлены различные задачи теории управления. Решение задачи стабилизации движения по отношению к многообразию, определяемому сервосвязями, можно искать, согласно А.Г. Азизову [4–6], принуждением вида

$$\tilde{U} = K_3 x, \quad (12)$$

где K_3 – ненулевая матрица размерности $(\kappa \times c_I)$, обеспечивающие стабилизацию тривиального решения $x=0$ системы:

$$\dot{x} = (A + BK_3)x. \quad (13)$$

Чтобы не удлиннять дальнейших записей предположим, что все связи, налагаемые на систему, стационарны. Тогда кинетическая энергия параметрически освобожденной системы будет иметь вид [18]:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (14)$$

С учетом первой группы стационарных уравнений (2) и (4) вместо обобщенных координат $q_1, \dots, q_a$ введем параметры $\eta_1, \dots, \eta_a$. Соотношениями, тождественно удовлетворяющими стационарным уравнениям (1) и второй группе уравнений (4), введем скоростные параметры e_v :

$$\dot{Z}_i = \sum_{v=b+1}^n C_{iv} e_v, \quad (i=1, \dots, n).$$

Тогда выражение кинетической энергии (14) преобразуется к виду

$$\tilde{T} = \frac{1}{2} \sum_{v=b+1}^n \sum_{v_1=b+1}^n \tilde{A}_{vv_1} e_v e_{v_1},$$

где $\tilde{A}_{vv_1} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \cdot C_{jv_1} \cdot C_{vi}$, и энергия ускорений S системы,

согласно монографии А.И. Лурье [18], будет иметь вид:

$$S = \frac{1}{2} \sum_{v=b+1}^n \sum_{v_1=b_1+1}^n \tilde{A}_{vv_1} \cdot \dot{e}_v \dot{e}_{v_1} + \sum_{v=b+1}^n \sum_{v_1=b+1}^n \sum_{v_2=b+1}^n [v_1, v_2, v] \cdot e_{v_1} e_{v_2} e_v$$

или в развернутом виде:

$$\begin{aligned}
 S = & \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^a \sum_{p=1}^a A_{ap} \ddot{\eta}_p \ddot{\eta}_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\gamma=1}^c \sum_{\delta=1}^c A_{a+\delta, a+\gamma} \dot{\xi}_\delta \dot{\xi}_\gamma + \frac{1}{2} \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} \sum_{\rho_2=1}^{n-\kappa-b} A_{\kappa+\rho_1, \kappa+\rho_2} \cdot \\
 & \cdot \dot{e}_{\kappa+\rho_1} \dot{e}_{\kappa+\rho_2} + \sum_{\alpha=1}^a \sum_{\delta=1}^c A_{\alpha, a+\delta} \cdot \ddot{\eta}_\alpha \dot{\xi}_\delta + \sum_{\alpha=1}^a \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} A_{\alpha, \kappa+\rho_1} \cdot \ddot{\eta}_\alpha \dot{e}_{\kappa+\rho_1} + \\
 & + \sum_{\delta=1}^c \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} A_{a+\delta, \kappa+\rho_1} \cdot \dot{\xi}_\delta \dot{e}_{\kappa+\rho_1} + \sum_{\alpha=1}^a \left\{ \sum_{\alpha_1=1}^a \sum_{p=1}^a [p, \alpha_1, \alpha] \dot{\eta}_{\alpha_1} \dot{\eta}_p + \right. \\
 & + \sum_{p=1}^a \sum_{\delta=1}^c [p, a+\delta, \alpha] \cdot \dot{\eta}_p \xi_\delta + \sum_{p=1}^a \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} [p, \kappa+\rho_1, \alpha] \dot{\eta}_p e_{\kappa+\rho_1} + \\
 & + \sum_{\delta=1}^c \sum_{p=1}^c [a+\gamma, \alpha+\delta, \alpha] \xi_\delta \xi_\gamma + \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} \sum_{\rho_2=1}^{n-\kappa-b} [\kappa+\rho, \kappa+\rho_1, \alpha] \cdot e_{\kappa+\rho} e_{\kappa+\rho_2} + \\
 & \left. + \sum_{\delta=1}^c \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} [a+\delta, \kappa+\rho_1, \alpha] \xi_\delta e_{\kappa+\rho_1} \right\} \ddot{\eta}_\alpha + \sum_{\delta=1}^c \left\{ \sum_{\alpha=1}^a \sum_{p=1}^a [p, \alpha, a+\delta] \dot{\eta}_p \dot{\eta}_\alpha + \right. \\
 & + \sum_{p=1}^a \sum_{\gamma=1}^c [p, a+\gamma, a+\delta] \cdot \dot{\eta}_p \xi_\gamma + \sum_{p=1}^a \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} [p, \kappa+\rho_1, a+\delta] \dot{\eta}_p e_{\kappa+\rho_1} + \\
 & + \sum_{\gamma_1=1}^c \sum_{\gamma=1}^c [a+\gamma_1, a+\gamma, a+\delta] \xi_{\gamma_1} \xi_\gamma + \sum_{\gamma=1}^c \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} [a+\gamma, \kappa+\rho_1, a+\delta] \cdot \\
 & \cdot \xi_\gamma e_{\kappa+\rho_1} + \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} \sum_{\rho_2=1}^{n-\kappa-b} [\kappa+\rho_1, \kappa+\rho_2, a+\delta] e_{\kappa+\rho_1} e_{\kappa+\rho_2} \left. \right\} \xi_\delta + \\
 & + \sum_{\rho=1}^{n-\kappa-b} \left\{ \sum_{\alpha=1}^a \sum_{p=1}^a [p, \alpha, \kappa+\rho] \dot{\eta}_p \dot{\eta}_\alpha + \sum_{p=1}^a \sum_{\delta=1}^c [p, a+\delta, \kappa+\rho] \dot{\eta}_p \xi_\delta + \right. \\
 & + \sum_{p=1}^a \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} [p, \kappa+\rho_1, \kappa+\rho] \cdot \dot{\eta}_p e_{\kappa+\rho_1} + \sum_{\delta=1}^c \sum_{\gamma=1}^c [a+\delta, a+\gamma, \kappa+\rho] \xi_\delta \xi_\gamma + \\
 & + \sum_{\delta=1}^c \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} [a+\delta, \kappa+\rho_1, \kappa+\rho] \xi_\delta e_{\kappa+\rho_1} + \\
 & \left. + \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} \sum_{\rho_2=1}^{n-\kappa-b} [\kappa+\rho_1, \kappa+\rho_2, \kappa+\rho] \cdot e_{\kappa+\rho_1} e_{\kappa+\rho_2} \right\} \cdot \dot{e}_{\kappa+\rho}.
 \end{aligned}$$

Тогда уравнения (9) в явном виде будут следующими:

$$\begin{aligned}
 1) \sum_{p=1}^a A_{ap} \ddot{\eta}_p + \sum_{\delta=1}^c A_{a,a+\delta} \dot{\xi}_{\delta} + \sum_{\rho=1}^{n-\kappa-b} A_{\alpha,\kappa+\rho} \dot{e}_{\kappa+\rho} + \\
 + \sum_{\alpha_1=1}^a \sum_{p=1}^a [\alpha_1, p, \alpha] \dot{h}_{\alpha_1} \dot{\eta}_p + \sum_{p=1}^a \sum_{\delta=1}^c [p, a+\delta, \alpha] \dot{h}_p \xi_{\delta} + \\
 + \sum_{p=1}^a \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} [p, \kappa+\rho_1, \alpha] \dot{h}_p e_{\kappa+\rho_1} + \sum_{\delta=1}^c \sum_{\gamma=1}^c [a+\gamma, a+\delta, \alpha] \cdot \xi_{\delta} \xi_{\gamma} + \\
 + \sum_{\delta=1}^c \sum_{\rho=1}^{n-\kappa-b} [a+\delta, \kappa+\rho, \alpha] \xi_{\delta} e_{\kappa+\rho} + \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} \sum_{\rho=1}^{n-\kappa-b} [\kappa+\rho_1, \kappa+\rho, \alpha] e_{\kappa+\rho_1} e_{\kappa+\rho} = \\
 = Q_{\alpha} + \sum_{\theta_2=1}^{\kappa} \lambda_{\theta_2} \tilde{a}_{\theta_2 \alpha}, \quad (\alpha=1, \dots, a);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \sum_{p=1}^a A_{a+\delta,p} \ddot{\eta}_p + \sum_{\delta_1=1}^c A_{a+\delta,a+\delta_1} \dot{\xi}_{\delta_1} + \sum_{\rho=1}^{n-\kappa-b} A_{a+\delta,\kappa+\rho} \dot{e}_{\kappa+\rho} + \\
 + \sum_{\alpha=1}^a \sum_{p=1}^a [\alpha, p, a+\delta] \dot{h}_{\alpha} \dot{\eta}_p + \sum_{\alpha=1}^a \sum_{\delta_1=1}^c [\alpha, a+\delta_1, a+\delta] \dot{h}_{\alpha} \xi_{\delta_1} + \\
 + \sum_{\gamma=1}^c \sum_{\delta_1=1}^c [a+\gamma, a+\delta_1, a+\delta] \xi_{\gamma} \xi_{\delta_1} + \sum_{\alpha=1}^a \sum_{\rho=1}^{n-\kappa-b} [\alpha, \kappa+\rho, a+\delta] \cdot \dot{\eta}_{\alpha} e_{\kappa+\rho} + \\
 + \sum_{\gamma=1}^c \sum_{\rho=1}^{n-\kappa-b} [a+\gamma, \kappa+\rho, a+\delta] \xi_{\gamma} e_{\kappa+\rho} + \sum_{\rho=1}^{n-\kappa-b} \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} [\kappa+\rho_1, \kappa+\rho, a+\delta] e_{\kappa+\rho_1} e_{\kappa+\rho} = \\
 = Q_{a+\delta} + \sum_{\theta_2=1}^{\kappa} \tilde{a}_{\theta_2, a+\delta}, \quad (\delta=1, \dots, c);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \sum_{p=1}^a A \ddot{\eta}_p + \sum_{\delta=1}^c A_{\kappa+\rho,a+\delta} \dot{\xi}_{\delta} + \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} A_{\kappa+\rho,\kappa+\rho_1} \dot{e}_{\kappa+\rho_1} + \\
 + \sum_{\alpha=1}^a \sum_{p=1}^a [p, \alpha, \kappa+\rho] \dot{h}_p \dot{\eta}_{\alpha} + \sum_{p=1}^a \sum_{\delta=1}^c [p, a+\delta, \kappa+\rho] \dot{h}_p \xi_{\delta} + \\
 + \sum_{p=1}^a \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} [p, \kappa+\rho_1, \kappa+\rho] \dot{h}_p e_{\kappa+\rho_1} + \sum_{\delta=1}^c \sum_{\gamma=1}^c [a+\delta, a+\gamma, \kappa+\rho] \cdot \xi_{\delta} \xi_{\gamma} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{\delta=1}^c \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} [a + \delta, \kappa + \rho_1, \kappa + \rho] \xi_{\delta} e_{\kappa+\rho_1} + \\
 & + \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} \sum_{\rho_2=1}^{n-\kappa-b} [\kappa + \rho_2, \kappa + \rho_1, \kappa + \rho] e_{\kappa+\rho_1} e_{\kappa+\rho_2} = \\
 & = Q_{\kappa+\rho} + \sum_{\theta_2=1}^{\kappa} \lambda_{\theta_2} \tilde{a}_{\theta_2, \kappa+\rho}, \quad (\rho=1, \dots, n-\kappa-b). \quad (15)
 \end{aligned}$$

Исследование устойчивости

Теорема. Управляемая механическая система (9) или (15), стесненная связями (1) и (2) всегда может быть стабилизирована относительно многообразия, определяемого связями (1).1

Доказательство. Пусть реакции связей второго рода $R_{\alpha}^{(2)}, R_{a+\delta}^{(2)}, R_{\kappa+\rho}^{(2)}$ формированы по законам:

$$\begin{aligned}
 R_{\alpha}^{(2)} &= \sum_{\rho=1}^{n-\kappa-b} \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} [\kappa + \rho, \kappa + \rho_1, \alpha]^o e_{\kappa+\rho} e_{\kappa+\rho_1} - Q_{\alpha}^o - \\
 & - \sum_{p=1}^a (\kappa'_{ap} \dot{\eta}_p + \kappa''_{ap} \eta_p) - \sum_{\delta=1}^c \kappa_{\alpha, a+\delta} \xi_{\delta}, \quad (\alpha=1, \dots, a), \\
 R_{a+\delta}^{(2)} &= \sum_{\rho=1}^{n-\kappa-b} \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} [\kappa + \rho, \kappa + \rho_1, a+\delta]^o - Q_{a+\delta}^o - \sum_{p=1}^a (\kappa'_{a+\delta, p} \cdot \eta_p + \kappa''_{a+\delta, p} \cdot \eta_p) - \\
 & - \sum_{\gamma=1}^c \kappa_{a+\delta, a+\gamma} \cdot \xi_{\gamma}, \quad (\gamma=1, \dots, c), \\
 R_{\kappa+\rho}^{(2)} &= \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} \sum_{\rho_2=1}^{n-\kappa-b} [\kappa + \rho_1, \kappa + \rho_2, \kappa + \rho]^o \cdot e_{\kappa+\rho_1} e_{\kappa+\rho_2} - Q_{\kappa+\rho}^o, \\
 & (\rho=1, \dots, n-\kappa-b). \quad (15a)
 \end{aligned}$$

Тогда система уравнений (15) приводиться к виду:

$$\begin{aligned}
 1) \sum_{p=1}^a \left(A_{ap}^o + \sum_{\alpha_1=1}^a A_{ap}^{\alpha_1} \eta_{\alpha_1} \right) \ddot{\eta}_p + \sum_{\delta=1}^c \left(A_{\alpha, a+\delta}^o + \sum_{\alpha_1=1}^a A_{\alpha, a+\delta}^{\alpha_1} \eta_{\alpha_1} \right) \dot{\xi}_{\delta} + \\
 + \sum_{p=1}^a \left(\sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} [p, \kappa + \rho_1, \alpha]^o e_{\kappa+\rho_1} \right) \dot{\eta}_p + \sum_{\delta=1}^c \left(\sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} [a + \delta, \kappa + \rho_1, \alpha]^o \cdot
 \end{aligned}$$

$$\cdot e_{\kappa+\rho_1} - Q_{\alpha}^{a+\delta} \Big) \xi_{\delta} + \sum_{p=1}^a \left(\sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} A_{\alpha, \kappa+\rho_1}^p \cdot \dot{e}_{\kappa+\rho_1} + \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} \sum_{\rho_2=1}^{n-\kappa-b} [\kappa+\rho_1, \kappa+\rho_2, \alpha]^p \cdot \right. \\ \left. \cdot e_{\kappa+\rho_1} e_{\kappa+\rho_2} - Q_{\alpha}^p \right) \eta_p + X_{\alpha}' (\eta_p^2, \dot{\eta}_p^2, \xi_{\delta}^2) = 0, \quad (\alpha=1, \dots, a);$$

2)

$$\sum_{\gamma=1}^c \left(A_{a+\delta, a+\gamma}^o + \sum_{p=1}^a A_{a+\delta, a+\gamma}^p \eta_p \right) \dot{\xi}_p + \sum_{p=1}^a \left(A_{a+\delta, p}^o + \sum_{\alpha=1}^a A_{a+\delta, p}^{\alpha} \eta_{\alpha} \right) \ddot{\eta}_p + \\ + \sum_{\delta_1=1}^c \left(\sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} [a+\delta_1, \kappa+\rho_1, a+\delta]^o e_{\kappa+\rho_1} - Q_{a+\delta}^{a+\delta_1} \right) \xi_{\delta_1} + \\ + \sum_{p=1}^a \left(\sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} [p, \kappa+\rho_1, a+\delta]^p \cdot \right. \\ \left. \cdot e_{\kappa+\rho_1} \right) \dot{\eta}_p + \sum_{p=1}^a \left(\sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} A_{a+\delta, a+\gamma}^p \cdot \dot{e}_{\kappa+\gamma} + \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} \sum_{\rho_2=1}^{n-\kappa-b} [\kappa+\rho_1, \kappa+\rho_2, a+\delta]^p \cdot \right. \\ \left. \cdot e_{\kappa+\rho_1} e_{\kappa+\rho_2} - Q_{a+\delta}^p \right) \eta_p + X_{a+\delta}' (\eta_p^2, \dot{\eta}_p^2, \xi_{\delta}^2) = 0, \quad (\delta=1, \dots, c);$$

3)

$$\sum_{p=1}^c \left(A_{\kappa+\rho, p}^o + \sum_{\alpha=1}^a A_{\kappa+\rho, p}^{\alpha} \eta_{\alpha} \right) \ddot{\eta}_p + \sum_{\delta=1}^c \left(A_{\kappa+\rho, a+\delta}^o + \sum_{p=1}^a A_{\kappa+\rho, a+\delta}^p \cdot \eta_p \right) \dot{\xi}_{\delta} + \\ + \sum_{p=1}^a \left\{ \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} [p, \kappa+\rho_1, \kappa+\rho] e_{\kappa+\rho_1} \right\} \dot{\eta}_p + \sum_{\delta=1}^c \left\{ \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} [a+\delta, \kappa+\rho_1, \kappa+\rho]^p \cdot \right. \\ \left. \cdot e_{\kappa+\rho_1} - Q_{\kappa+\rho_1}^{a+\delta} \right\} \xi_{\delta} + \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} A_{\kappa+\rho, \kappa+\rho_1}^p \cdot \dot{e}_{\kappa+\rho_1} + \sum_{\rho=1}^a \left\{ A_{\kappa+\rho, \kappa+\rho_1}^p \dot{e}_{\kappa+\rho_1} - Q_{\kappa+\rho}^p + \right. \\ \left. + \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} \sum_{\rho_2=1}^{n-\kappa-b} [\kappa+\rho_1, \kappa+\rho_2, \kappa+\rho]^p \cdot e_{\kappa+\rho_1} e_{\kappa+\rho_2} \right\} \eta_p + \\ + X_{\alpha}' (\eta_p^2, \dot{\eta}_p^2, \xi_{\delta}^2) = 0, \quad (\rho=1, \dots, n-\kappa-b), \quad (16)$$

где $X'_\alpha(\eta_p^2, \dot{\eta}_p^2, \xi_\delta^2) X'_{a+\delta}(\eta_p^2, \dot{\eta}_p^2, \xi_\delta^2) X'_{\kappa+\rho}$ – члены второго и более высокого порядка относительно $\eta_p^2, \dot{\eta}_p^2, \xi_\delta^2$.

Из последних $n-\kappa-b$ уравнений системы (16) определим $\dot{e}_{\kappa+\rho}$. Так как из работ А.И. Лурье [18] и В.В. Зубова [17] известно, что $A^o_{\kappa+\rho, \kappa+\rho_1}$ положительно-определенная матрица, то получим:

$$\begin{aligned} \dot{e}_{\kappa+\rho} = & \frac{1}{\left| \left(A^o_{\kappa+\rho, \kappa+\rho_1} \right)^T \right|} \sum_{\rho_2=1}^{n-\kappa-b} A^{\kappa+\rho, \kappa+\rho_2} \left\{ - \sum_{p=1}^a \left(A^o_{\kappa+\rho_2, p} + \sum_{\alpha=1}^a A_{\kappa+\rho, p}^\alpha \eta_\alpha \right) \dot{\eta}_p - \right. \\ & - \sum_{\delta=1}^c \left(A^o_{\kappa+\rho_2, a+\delta} + \sum_{p=1}^a A^p_{\kappa+\rho_2, a+\delta} \cdot \eta_p \right) \xi_\delta - \sum_{p=1}^a \left\{ \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} [p, \kappa+\rho_1, \kappa+\rho_2]^o e_{\kappa+\rho_1} \right\} \dot{\eta}_p - \\ & - \sum_{\delta=1}^c \left\{ \sum_{\rho_3=1}^{n-\kappa-b} [a+\delta, \kappa+\rho_3, \kappa+\rho_2]^o e_{\kappa+\rho_3} - Q^{a+\delta}_{\kappa+\rho_2} \right\} \xi_\delta - \\ & - \sum_{p=1}^a \left\{ \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} A^p_{\kappa+\rho_2, \kappa+\rho_1} \cdot \dot{e}_{\kappa+\rho_1} - Q^p_{\kappa+\rho_2} + \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} \sum_{\rho_2=1}^{n-\kappa-b} [\kappa+\rho_1, \kappa+\rho_3, \kappa+\rho_2]^p \cdot \right. \\ & \left. \cdot e_{\kappa+\rho_1} e_{\kappa+\rho_3} \right\} \dot{\eta}_p - X'_{\kappa+\rho} \left. \right\}, \quad (17) \end{aligned}$$

где $\left(A^o_{\kappa+\rho, \kappa+\rho_1} \right)^T$ – транспонированная матрица; $A^{\kappa+\rho, \kappa+\rho_1}$ – алгебраическое дополнение элемента $A_{\kappa+\rho, \kappa+\rho_1}$; $(\kappa+\rho_1)$ -ой строки и $(\kappa+\rho)$ -го столбца определителя $\left| \left(A^o_{\kappa+\rho, \kappa+\rho_1} \right)^T \right|$ транспонированной матрицы $\left(A^o_{\kappa+\rho, \kappa+\rho_1} \right)^T$.

Подставляя (17) в первую группу a уравнений и во вторую группу c уравнений системы (16), получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^a \tilde{A}_{ap} \dot{\eta}_p + \sum_{\delta=1}^c \tilde{B}_{a, a+\delta} \dot{\xi}_\delta + \sum_{p=1}^a \tilde{C}_{ap} \dot{\eta}_p + \sum_{\delta=1}^c D_{a, a+\delta} \xi_\delta + \\ & + \sum_{p=1}^a \tilde{E}_{ap} \eta_p + \tilde{X}_\alpha (\eta_p^2, \dot{\eta}_p^2, \xi_\delta^2) = 0, \quad (\alpha=1, \dots, a), \end{aligned}$$

$$\sum_{p=1}^a \tilde{A}_{\alpha+\delta,p} \ddot{\eta}_p + \sum_{\delta=1}^c \tilde{B}_{\alpha+\delta,a+\gamma} \ddot{\xi}_\gamma + \sum_{p=1}^a \tilde{C}_{\alpha+\delta,p} \dot{\eta}_p + \sum_{\gamma=1}^c \tilde{D}_{\alpha+\delta,a+\gamma} \dot{\xi}_\gamma +$$

$$+ \sum_{p=1}^a E_{\alpha+\delta,p} \eta_p + \tilde{X}_{\alpha+\delta} = 0, \quad (\delta=1, \dots, c), \quad (18)$$

где

$$\tilde{A}_{\alpha p} = \tilde{A}_{\alpha p}^o + \sum_{\alpha_1=1}^a A_{\alpha p}^{\alpha_1} \eta_{\alpha_1} - \frac{1}{\left| (A_{\kappa+\rho, \kappa+\rho_1}^o)^T \right|} \cdot \sum_{\rho=1}^{n-\kappa-b} \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} A_{\alpha, \kappa+\rho}^o \cdot$$

$$\cdot A^{\kappa+\rho, \kappa+\rho_2} \left(A_{\kappa+\rho_2, p}^o + \sum_{\alpha_1=1}^a A_{\kappa+\rho_2, p}^{\alpha_1} \eta_{\alpha_1} \right);$$

$$\tilde{B}_{\alpha, a+\delta} = A_{\alpha, a+\delta}^o + \sum_{p=1}^a A_{\alpha, a+\delta}^p \eta_p - \frac{1}{\left| (A_{\kappa+\rho, \kappa+\rho_1}^o)^T \right|} \cdot \sum_{\rho_2=1}^{n-\kappa-b} \sum_{\rho=1}^{n-\kappa-b} A_{\alpha, \kappa+\rho}^o \cdot$$

$$\cdot A^{\kappa+\rho, \kappa+\rho_2} \left(A_{\kappa+\rho_2, a+\delta}^o + \sum_{p=1}^a A_{\kappa+\rho, a+\delta}^p \right) \eta_p;$$

$$\tilde{C}_{\alpha p} = \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} [p, \kappa + \rho_1, \alpha]^o \cdot e_{\kappa+\rho} - \frac{1}{\left| (A_{\kappa+\rho, \kappa+\rho_1}^o)^T \right|} \cdot \sum_{\rho_2=1}^{n-\kappa-b} \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} A_{\alpha, \kappa+\rho}^o \cdot$$

$$\cdot A^{\kappa+\rho, \kappa+\rho_2} \left(\sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} [p, \kappa + \rho_1, \kappa + \rho_2] e_{\kappa+\rho_1} \right);$$

$$\tilde{D}_{\alpha, a+\delta} = \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} [a + \delta, \kappa + \rho_1, \alpha]^o \cdot e_{\kappa+\rho_1} - Q_{\alpha}^{a+\delta} - \frac{1}{\left| (A_{\kappa+\rho, \kappa+\rho_1}^o)^T \right|} \cdot$$

$$\cdot \sum_{\rho=1}^{n-\kappa-b} \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} A_{\alpha, \kappa+\rho} \cdot A^{\kappa+\rho, \kappa+\rho_2} \left(\sum_{\rho_3=1}^{n-\kappa-b} [a + \delta, \kappa + \rho_3, \kappa + \rho_2]^o \cdot e_{\kappa+\rho_3} - Q_{\kappa+\rho_2}^{a+\delta} \right);$$

$$E_{\alpha p} = \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} A_{\alpha, \kappa+\rho_1}^p \dot{e}_{\kappa+\rho_1} + \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} \sum_{\rho_2=1}^{n-\kappa-b} [\kappa + \rho_1, \kappa + \rho_2, \alpha]^p \cdot$$

$$; \cdot e_{\kappa+\rho_1} e_{\kappa+\rho_2} - Q_{\alpha}^p - \frac{1}{\left| (A_{\kappa+\rho, \kappa+\rho_1}^o)^T \right|} \sum_{\rho=1}^{n-\kappa-b} \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} A_{\alpha, \kappa+\rho}^o \cdot$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot A^{\kappa+\rho, \kappa+\rho_2} \left\{ \sum_{\rho_3=1}^{n-\kappa-b} A_{\kappa+\rho_1, \kappa+\rho_3}^p \dot{e}_{\kappa+\rho_3} - Q_{\kappa+\rho_2}^p + \right. \\
 & \left. + \sum_{\rho_3=1}^{n-\kappa-b} \sum_{\rho_4=1}^{n-\kappa-b} [k + \rho_3, \kappa + \rho_4, \kappa + \rho]^p \cdot e_{\kappa+\rho_3} e_{\kappa+\rho_4} \right\}; \\
 \tilde{A}_{a+\delta, p} &= A_{a+\delta, p}^o + \sum_{\alpha=1}^a A_{a+\delta, p}^\alpha \eta_\delta - \frac{1}{\left| (A_{\kappa+\rho, \kappa+\rho_1}^o)^T \right|} \cdot \sum_{\rho=1}^{n-\kappa-b} \sum_{\rho_2=1}^{n-\kappa-b} A_{a+\delta, \kappa+\rho}^o \cdot \\
 & \cdot A^{\kappa+\rho, \kappa+\rho_2} \left(A_{\kappa+\rho_2, p}^o + \sum_{\alpha=1}^a A_{\kappa+\rho_2, p}^\alpha \eta_\alpha \right).
 \end{aligned}$$

При обозначениях

$$\begin{aligned}
 \eta_p &= x_p & \dot{\eta}_p &= x_{a+p}, & \xi_\delta &= x_{a+\delta} \\
 (p=1, \dots, a) & & (\delta=1, \dots, c) & & &
 \end{aligned}$$

уравнения (18) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_{i_2}}{dt} &= P_{i_2 1}(t)x_1 + \dots + P_{i_2, n_2}(t)x_{n_2} + \varphi_{i_2}(t, x_1, \dots, x_{n_2}) \\
 (i_2=1, \dots, n_2=2a+c), & \quad (19)
 \end{aligned}$$

где

$$P = \left(\begin{array}{c|c|c} E_{op} & O & O \\ \hline \sum_{\alpha_1=1}^a \tilde{A}^{p\alpha_1} \tilde{C}_{\alpha_1\alpha} & \sum_{\delta_1=1}^c \tilde{A}^{p, \alpha+\delta_1} \tilde{D}_{a+\delta_1, \alpha} & \sum_{\alpha=1}^a \tilde{A}^{p, \kappa+\alpha_1} E_{\alpha_1\alpha} \\ \hline \begin{array}{c} \tilde{A}_{op} \quad \tilde{B}_{\alpha, a+\delta} \\ \tilde{A}_{a+\delta, p} \quad \tilde{B}_{a+\delta_1, a+\delta} \end{array} & \begin{array}{c} \tilde{A}_{op} \quad \tilde{B}_{\alpha, a+\delta} \\ \tilde{A}_{a+\delta, p} \quad \tilde{B}_{a+\delta_1, a+\delta} \end{array} & \begin{array}{c} \tilde{A}_{op} \quad \tilde{B}_{\alpha, a+\delta} \\ \tilde{A}_{a+\delta, p} \quad \tilde{B}_{a+\delta_1, a+\delta} \end{array} \\ \hline \sum_{\alpha_1=1}^a \tilde{A}^{a+\delta, \alpha} \tilde{C}_{op} & \sum_{\alpha_1=1}^c \tilde{A} & \sum_{\alpha_1=1}^a \tilde{A}^{a+\delta, a+\alpha} E_{\alpha, a+\gamma} \\ \hline \begin{array}{c} \tilde{A}_{op} \quad \tilde{B}_{\alpha, a+\delta} \\ \tilde{A}_{a+\delta, p} \quad \tilde{B}_{a+\delta_1, a+\delta} \end{array} & \begin{array}{c} \tilde{A}_{op} \quad \tilde{B}_{\alpha, a+\delta} \\ \tilde{A}_{a+\delta, p} \quad \tilde{B}_{a+\delta_1, a+\delta} \end{array} & \begin{array}{c} \tilde{A}_{op} \quad \tilde{B}_{\alpha, a+\delta} \\ \tilde{A}_{a+\delta, p} \quad \tilde{B}_{a+\delta_1, a+\delta} \end{array} \end{array} \right) \quad (20)$$

Из выражений (20) видно, что уравнения (19) представляют собой систему дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Устойчивость этой системы по отношению к многообразию, определяемому сервосвязями (2), будем исследовать по методам, разработанным Н.Н. Красовским [19] и К.П. Персидским [20].

Следуя [19, 20], предположим, что решения $x(x_0, t_0, t)$ приближенной системы уравнений

$$\frac{dx_{i_1}}{dt} = p_{i_1}(t)x_1 + \dots + p_{i_1 n_1}(t)x_{n_1}, \quad (19б)$$

удовлетворяют неравенству

$$\|x(x_0, t_0, t)\| \leq B\|x_0\| \exp(-\alpha(t - t_0)), \quad (19в)$$

при

$$t \geq t_0,$$

для любых начальных условий x_0, t_0 . Согласно Н.Н. Красовскому [19], условие (19в) равносильно существованию функции $v(x, t)$, удовлетворяющей ограничениям (19б):

$$\left. \begin{aligned} c_1\|x\|^2 &\leq v(x, t) \leq c_2\|x\|^2, \\ \left(\frac{dv}{dt}\right)_{1.1.14б} &\leq -c_3\|x\|^2, \\ \left|\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\right| &\leq c_4\|x\|, \end{aligned} \right\} \quad (19г)$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 – положительные постоянные.

При этом функция $v(x, t)$ сохранит свои свойства и для системы (19), если только функции $\varphi_i(t, x_1, \dots, x_{n_1})$ удовлетворяют неравенству

$$\left|\varphi_i(t, x_1, \dots, x_{n_1})\right| < \frac{(1-q)c_3\|x\|}{nc_4} \quad (19д)$$

и в оценках (19г) второе неравенство следует записать в виде

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{19} \leq -qc_3\|x\|^2.$$

Выберем вспомогательную систему уравнений

$$\frac{dx_{i_2}}{dt} = d_{i_2,1}x_1 + \dots + d_{i_2,n_2}x_{n_2}, \quad (i_2=1, \dots, n_2=2a+c), \quad (21)$$

где функции $d_{i_2,1}, \dots, d_{i_2,n_2}$, $(i_2=1, \dots, n_2=2a+c)$ выбираются согласно случаям 1, 2, 3 [19]. При этом предполагается, что корни λ_{i_2} характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} d_{11} - \lambda & d_{12} & \dots & d_{1,n_2} \\ d_{21} & d_{22} - \lambda & \dots & d_{2,n_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n_2,1} & d_{n_2,2} & \dots & d_{n_2,n_2} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

системы (21) удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re} \lambda_{i_1} < -\delta_1, \quad (\delta_1 > 0; i_1=1, \dots, 2a).$$

Когда вспомогательная система (21) выбрана, исследования проводим следующим образом. Задаем определенно-отрицательную форму:

$$w(x) = \sum_{i_2=1}^{2a+c} \sum_{j_2=1}^{2a+c} C_{i_2 j_2} x_{i_2} x_{j_2}$$

и строим функцию $v(x) = \sum_{i_2=1}^{2a+c} \sum_{j_2=1}^{2a+c} a_{i_2 j_2} x_{i_2} x_{j_2}$, удовлетворяющую

условиям $\left(\frac{dv}{dt} \right)_{21} = w(x).$

Здесь коэффициенты $a_{i_2 j_2} (i_2, j_2 = 1, \dots, n_2)$ квадратичной формы

$$v(x) = \sum_{i_2=1}^{2a+c} \sum_{j_2=1}^{2a+c} a_{i_2 j_2} x_{i_2} x_{j_2}$$

определяются решением системы уравнений

$$C_{i_2 j_2} = \sum_{K_7=1}^{2a+c} (a_{i_2 K_7} d_{K_7 j_2} + a_{j_2 K_7} d_{K_7 i_2}) \quad \text{относительно } a_{i_2 j_2} (i_2, j_2 = 1, \dots, n_2).$$

При этом предполагается, что последняя система уравнений разрешима относительно $a_{i_2 j_2}$, т.е. дефект матрицы

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1,n_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n_2,1} & d_{n_2,2} & \dots & d_{n_2,n_2} \end{pmatrix}, (n_2=2a+c)$$

равен нулю.

$$\text{Вычислим } \left(\frac{dv}{dt} \right)_{19} :$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dv}{dt} \right)_{2.1.19} &= \\ &= w(x) + \sum_{i_2=1}^{2a+c} \sum_{j_2=1}^{2a+c} \sum_{\kappa_7=1}^{2a+c} (a_{i_2 j_2} [p_{j_2 \kappa_7}(t) - d_{j_2 \kappa_7}] + a_{\kappa_7 j_2} [p_{j_2 i_2}(t) - d_{j_2 i_2}]) \cdot \\ &\quad \cdot x_{i_2} x_{\kappa_7} + \sum_{i_2=1}^{2a+c} \sum_{j_2=1}^{2a+c} a_{i_2 j_2} x_{j_2} \varphi_{i_2}(t, x) \end{aligned}$$

Очевидно, что любую функцию $\varphi_{i_2}(t, x)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \varphi_{i_2}(t, x) &= \sum_{\kappa_7=1}^{2a+c} h_{i_2 \kappa_7}(t, x) \cdot x_{\kappa_7}, \\ \left(\frac{dv}{dt} \right)_{19} &= \sum_{i_2=1}^{2a+c} \sum_{j_2=1}^{2a+c} \sum_{\kappa_7=1}^{2a+c} (C_{i_2 \kappa_7} + a_{i_2 j_2} [p_{j_2 \kappa_7}(t) - d_{j_2 \kappa_7}] + \\ &\quad + a_{\kappa_7 j_2} [p_{j_2 i_2}(t) - d_{j_2 i_2}] + a_{i_2 j_2} \cdot h_{j_2 \kappa_7} + a_{\kappa_7 j_2} \cdot h_{j_2 i_2}) x_{i_2} x_{\kappa_7}. \quad (22) \end{aligned}$$

Для устойчивости решения $x=0$ системы (22), согласно работам И.Г. Малкина [21] и Г.Д. Меркина [22], достаточно, чтобы форма переменных $\{x_{i_2}\}$ в правой части равенства (22) была определенно-отрицательной.

Как известно, условия определенной положительности квадратичной формы $\sum_{i_2=1}^{2a+c} \sum_{\kappa_7=1}^{2a+c} l_{i_2 \kappa_7} \cdot x_{i_2} x_{\kappa_7} = -(dv/dt)$ задаются неравенствами Сильвестра (17). Так как $l_{i_2 \kappa_7}$ являются переменными, то для определенной отрицательности (dv/dt) , вообще

говоря, недостаточно выполнение условий (22). Неравенства Сильвестра должны выполняться равномерно по всем $x_1, \dots, x_{n_2}$, т.е. следует потребовать:

$$\Delta_{n_2} > \gamma_2, \quad \Delta_{n_2-1} > \gamma_2, \dots, \Delta_1 > \gamma_2. \quad (23)$$

$$(\gamma_2 > 0; \quad n_2 = 2a + c)$$

Соотношения (17) и (23) выражают условия устойчивости системы (19).

Заключение

Таким образом, полученные уравнения (15) выражают явный вид уравнений движения систем, стесненных геометрическими и кинематическими связями первого и второго рода с учетом параметрического освобождения систем от сервосвязей. Законы формирования сил реакций сервосвязей (15а) позволяют получить условия устойчивости (17) и (23), налагаемые на параметры системы (19).

Библиографический список

1. *Беген А.* Теория гироскопических компасов. М.: Наука, 1968. 192 с.
2. *Румянцев В.В.* О движении некоторых систем с неидеальными связями // Вестник МГУ. Сер. Математика, механика, 1961. Вып. 5. С. 67–75.
3. *Румянцев В.В.* О движении управляемых механических систем // Прикладная математика и механика. 1976. Т. 40, вып. 5. С. 771–781.
4. *Азизов А.Г.* Движение управляемых механических систем с сервосвязями // Прикладная математика и механика. 1990. Т. 54, № 3. С. 366–372.
5. *Азизов А.Г.* Прикладные задачи динамики управляемых систем: Учебное пособие. Ташкент. 1980. 28 с.
6. *Азизов А.Г.* Об уравнениях динамики систем с сервосвязями // Научные труды ТашГУ. 1975. Вып. 476. С. 67–75.
7. *Галиуллин А.С., Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г., Фурасов В.Д.* Построение систем программного движения. М.: Наука, 1971. 352 с.

8. *Галиуллин А.С.* Методы решения обратных задач динамики. М.: Наука, 1986. 224 с.

9. *Галиуллин А.С.* Избранные труды: в 2-х т. Т. I. М.: Изд-во РУДН. 2009. 210 с.

10. *Галиуллин А.С.* Избранные труды: в 2-х т. Т. II. М.: Изд-во РУДН. 2009. 464 с.

11. *Mukharlyamov R.G.* Reduction of the equations of dynamics of the systems with constraints to a given structure // Journal of Applied Mathematics and Mechanics (Prikl. Mat. Mekh.). 2007. Vol. 71, № 3. P. 361–370.

12. *Mukharlyamov R.G.* Stabilization of the motions of mechanical systems in prescribed phase-space manifolds // Journal of Applied Mathematics and Mechanics (Prikl. Mat. Mekh.). 2006. Vol. 70, № 2. P. 210–222.

13. *Мухарлямов Р.Г.* Об уравнениях кинематики и динамики несвободных механических систем // Механика твердого тела. 2000. Вып. 30. С. 68–79.

14. *Мухарлямов Р.Г.* Уравнения движения механических систем. М.: Изд-во РУДН, 2001. 99 с.

15. *Новоселов В.С.* Применение нелинейных неголономных координат в аналитической механике // Ученые записки. ЛГУ. № 217. С. 50–83.

16. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968. 476 с.

17. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 496 с.

18. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.

19. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.

20. *Персидский К.П.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. Теория вероятностей: Избр. тр. Т. 1. Алма-Ата: Наука. Каз. ССР, 1976. 272 с.

21. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 532 с.

22. *Меркин Г.Д.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1987. 304 с.