ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ
Нелинейные динамические системы

Вып. 49 Межвузовский сборник научных трудов 2017

УДК 517.9:519.677

И.Е. Полосков

Пермский государственный национальный исследовательский университет

Россия, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15
polosk@psu.ru; (342) 2-396-560

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С ПОМОЩЬЮ МОДИФИЦИРОВАННОЙ СХЕМЫ МШРПС

В данной работе на основе комбинации классического метода шагов и расширения пространства состояний (МШРПС), предложенной ранее для анализа различных структур с сосредоточенными и распределенными параметрами и дискретными запаздываниями, построена модифицированная процедура поиска решения динамических систем, описываемых функционально-дифференциальными уравнениями нейтрального типа в частных производных с одним постоянным запаздыванием. Реализация процедуры осуществлена в формате программы на входном языке пакета Mathematica. *Приведен пример применения представляемого метода.*

Ключевые слова: моделирование, функциональное дифференциальное уравнение, уравнение нейтрального типа, запаздывание, метод шагов.

Введение

Многие технические, природные и экономические системы обладают свойством последействия, заключающееся в том, что будущие состояния зависят не только от настоящего, но и от прошлой истории. Давно установлено, что наличие последействия необходимо учитывать в моделях механических, физических, химических, биологических и других систем, при решении задач теории управления, медицины, атомной энергии, теории информации и т.д. Такое широкое распространение последействия является основанием считать его универсальным свойством окружающего мира [37]. А вследствие того, что в связи с растущим спросом на более точные прогнозы, управление и производительность существует большая потребность в том, чтобы используемые модели как можно точнее описывали поведение реальных систем [39], естественен вывод о необходимости учета фактора запаздывания в имеющихся и разрабатываемых моделях различных процессов.

Если объединить понятия дифференциальных и функциональных уравнений, то можно получить понятие функционально-дифференциального уравнения (ФДУ) или, что то же самое, дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом (ДУсОА). ФДУ – это уравнение, связывающее неизвестную функцию и некоторые ее производные для, вообще говоря, разных значений аргументов, причем эти значения могут быть дискретными, непрерывными или смешанными, что соответствует понятиям дифференциально-разностного уравнения (ДРУ), в частности, дифференциального уравнения с запаздыванием (ДУсЗ), интегро-дифференциального уравнения (ИДУ) и т.д. Однако многие динамические системы зависят не только от нынешних и прошлых состояний, но также включают производные неизвестных функций с запаздывающими аргументами. Для описания таких систем часто используются дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения нейтрального типа (ДУНТ, ИДУНТ). Отметим, что ФДУ делятся еще на обыкновенные ФДУ (ОФДУ) и ФДУ в частных производных (ФДУвЧП), а (гибридные) системы ФДУ могут состоять из уравнений разных классов.

Согласно общепринятой в настоящее время классификации Г.Л. Каменского, уравнение называется функционально-дифференциальным уравнением запаздывающего типа (ФДУЗТ), нейтрального типа (ФДУНТ) или опережающего типа (ФДУОТ) соответственно, если максимальный порядок производных неизвестной функции с отклонением аргументов строго меньше (ФДУЗТ), равен (ФДУНТ) или больше (ФДУОТ) порядка уравнения.

Опыт математического моделирования различных объектов и явлений показывает, что эволюционные уравнения для реальных процессов с последействием являются почти исключительно ФДУЗТ и ФДУНТ. С другой стороны, решение различных задач для этих уравнений высвечивает тот факт, что ФДУЗТ и ФДУНТ имеют много интересных математических свойств.

Функционально-дифференциальные уравнения в частных производных (ФДУвЧП) используются при математическом моделировании многих биологических, химических и физических систем, которые характеризуются как пространственными, так и временными переменными и демонстрируют различные пространственно-временные закономерности [15, 30, 31, 47]. Систематическое исследование таких уравнений как с непрерывным, так и с дискретным запаздыванием с точки зрения динамических систем и полугрупп началось в 70-е гг., и с тех пор достигнуты значительные успехи [22, 47]. Большинство существующих результатов по ФДУ было получено с использованием различных методов, понятий и результатов из теории полугрупп, теории динамических систем, линейного и нелинейного функционального анализа, теории дифференциальных уравнений как обыкновенных, так и в частных производных, теории обыкновенных ФДУ (ОФДУ) и др.

Функционально-дифференциальные уравнения нейтрального типа (ФДУНТ) [1, 16], в первую очередь, параболического и гиперболического типов, естественным образом возникают в различных приложениях, таких как механические системы, вязкоупругие и термовязоупругие материалы, аэроупругость, гидродинамика, химическая кинетика, нейронные сети, системы управления с обратной связью и запаздыванием, интеллектуальные контроллеры, ядерные реакторы, химические технологии, гидротурбины, распределенные сети, линий передачи энергии без потерь, теплопередача, материалы с памятью, горение, взаимодействие видов в биологии, микробиология, эпидемиология, физиология, экологические системы, модели обучения и многие другие [19, 21, 27, 36–38, 45].

Один из классов квазилинейных ФДУ в частных производных нейтрального типа (ФДУНТвЧП) сформировался при решении задачи пространственной стабилизации связанных осцилляторов на периодической решетке [32], другой – при описании движения малой частицы в жидкости [37]. Кроме этого, ФДУНТвЧП используются при решения задач управления уравнениями в частных производных с помощью граничных условий [41].

ФДУНТ часто возникают при моделировании связанных колебательных систем с немгновенным соединением между частями. Иногда для упрощения модели предполагается, что временной лаг незначителен, однако в более реалистичных моделях необходимо учитывать временную задержку. Пример ДУНТсЗ, возникающего из-за редукции начальной краевой задачи для гиперболического уравнения, был рассмотрен в [24]. Представленная модель описывает крутильные колебания гибкого стержня с крутящим моментом, приложенным к одному концу стержны, и массы, прикрепленной к другому его концу. Новой областью, где использование ДУсЗ и, в частности, ДУНТ становится все более насущным, является процедура структурного или гибридного тестирования. Этот новый метод тестирования сложных конструкций или механического оборудования сочетает в себе использование вибростендов, приводов и компьютерных расчетов [39]. Основным механизмом неустойчивости такого эксперимента является наличие временны́х задержек, возникающих, в основном, из-за наличия информационного запаздывания в передающих системах.

Область исследований по инженерными приложениями ФДУЗТ, как правило, связана с ДУвЧПсЗ. Особые значение и интерес как для теории, так и для приложений представляет взаимосвязь между пространством и временны́м запаздыванием, которая может вызвать сложное динамическое поведение и привести к непростым пространственно-временным закономерностям. Из-за трудностей при анализе даже обычных ДУвЧП без запаздываний комбинация последействия и пространственной зависимости делает анализ ДУвЧПсЗ особенно трудоемким. Но к сожалению, поведение многих механических процессов не может быть корректно описано без использования ДУвЧПсЗ, например, вязкоупругие эффекты в некоторых материалах при наличии релаксационных напряжений [39].

Проблемы при анализе ФДУЗТ связаны с тем, что, как правило, они обладают определенными свойствами, которые затрудняют их изучение. Дело в том, что существенной особенностью решений задачи Коши для ФДУНТ является отсутствие сглаживающего свойства: даже если правая часть ФДУНТ и ее начальная функция сколь угодно гладкие, то производная (непрерывного) решения имеет скачки для сколь угодно больших значениях времени. Вместе с некоторыми другими это свойство делает нейтральные функционально-дифференциальные уравнения похожими на дифференциальные уравнения с частными производными гиперболического типа [37].

Детерминированные ОФДУНТ впервые были введены в работе [29], а В.Б. Колмановский и В.Р. Носов [4, 36] в такие ОФДУНТ для учета случайных флуктуаций включили гауссовские белые шумы. Рядом авторов теория ФДУНТ изучалась в банаховых пространствах [23, 33]. Абстрактные ФДУНТ первого порядка с конечным запаздыванием рассматривались в работах [17, 26] и др.

Проблема анализа устойчивости различных уравнений нейтрального типа продолжает привлекать внимание многих специалистов, несмотря на свою долгую историю [27]. Это по-прежнему одна из самых актуальных проблем из-за отсутствия полного решения указанной проблемы. Основным методом анализа устойчивости является метод функционалов типа Ляпунова, используя который получены важные результаты.

Развитие теории колебаний для обыкновенных дифференциальных уравнений началось в 1840-х гг., когда появилась классическая работа Ж.Ш.Ф. Штурма, в которой были доказаны теоремы о колебаниях и сравнение решений линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка. Первые результаты по осцилляции для ОДУ с отклонением аргумента были получены У.Б. Фите (W.B. Fite) в 1921 г. В последние годы число исследований, посвященных теории колебаний решений ФДУ, включая ФДУНТ, значительно возросло.

Итак, основными причинами того, что в предыдущие десятилетия исследованиям по ФДУНП было оказано большое внимание, являются следующие: 1) дифференциальные уравнения с запаздываниями (ДУсЗ) нередко являются более подходящими моделями для описания природных явлений, чем те, которые не учитывают влияние последействия; 2) ФДУНТ возникают во многих прикладных областях науки.

Наиболее часто применяемыми приближенно-аналитическими методами анализа ФДУЗТвЧП и ФЗУНТвЧП являются методы последовательных приближений, шагов и разложения решения в ряд по собственным функциям [3, 6, 16, 37].

Устойчивость численных методов играет важную роль в приближенном решении начальных задач. В прошлом большая часть работы по анализу асимптотической устойчивости ОФДУЗТ и ОФДУНТ касалась нахождения области устойчивости независимо от величины запаздывания [48]. Но в последние годы были получены важные результаты по стабильности в зависимости значения лага, например, была проанализирована устойчивость BDF- и θ-методов для линейных ОФДУНТ [48]. Недавно внимание нескольких авторов привлекли проблемы численного решения ФДУвЧП [34, 49, 50], но хотя их результаты напрямую не относятся к исследованию ФДУНТвЧП, алгоритмы интегрирования уравнений обоих классов сходны.

Имеется и значительное число других методов, как качественных [28, 43, 47], так и количественных (аналитических, приближенных, приближенно-аналитических или численно-аналитических) [2, 7–9, 13, 14, 18, 20, 25, 35, 42, 44, 46], но несмотря на определенные успехи, проблема разработки новых методов решения детерминированных ФДУЗТвЧП и ФЗУНТвЧП, алгоритмов и схем их реализации остается актуальной.

Ниже в данной работе на основе комбинации классического метода шагов и расширения пространства состояний (МШРПС), предложенной ранее для анализа различных структур с сосредоточенными и распределенными параметрами и дискретными запаздываниями [5, 10–12], строится модифицированная процедура построения решения динамических систем, описываемых ФДУНТвЧП с одним постоянным запаздыванием. Реализация процедуры осуществлена в формате программы на входном языке пакета компьютерной алгебры (ПКА) *Mathematica* [40]. Приведен пример применения представляемого метода.

1. Постановка задачи

Во введении был рассмотрен ряд точных и приближенных методов решения ОФДУНТ и ФДУНТвЧП. Необходимо отметить, что, как правило, указанные выше алгоритмы наряду с погрешностью дискретизации вносят дополнительную ошибку интерполяции при вычислении значений решения в точках, соответствующих аргументу с запаздыванием. Наша схема анализа ДРУНТвЧП, как и других форм детерминированных и стохастических систем с запаздыванием, базируется на комбинированной схеме МШРПС и позволяет рассматривать процедуры анализа различных форм ФДУЗТвЧП и ФДУНТвЧП с одной точки зрения. При этом при большинстве реализаций схемы ошибка метода отсутствует. Более того, исчезают многие проблемы, возникающие при реализации процедур прямого численного интегрирования ФДУЗТвЧП и ФДУНТвЧП.

Рассмотрим систему ДРУНТвЧП вида

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \mathbb{F}\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau), \boldsymbol{u}'_t(\boldsymbol{x},t-\tau), t\big], \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{D},$$
$$t_1 = t_0 + \tau < t \leqslant T < +\infty \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$\mathbb{G}\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau), \boldsymbol{u}'_t(\boldsymbol{x},t-\tau), t\big] = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\mathbb{D}, \quad (2)$$

где t – время, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ – вектор-строка пространственных переменных, $\boldsymbol{u} = \big\{u_1(\boldsymbol{x},t), u_2(\boldsymbol{x},t), ..., u_{\mathsf{n}}(\boldsymbol{x},t)\big\}^{\mathsf{T}}$ – векторное поле состояния, $\mathbb{D}$ – открытая ограниченная или неограниченная область, индексы x обозначает производные по соответствующим (векторным) переменным, τ – постоянное запаздывание,

$$\boldsymbol{f}(\cdot,\cdot,\cdot,...) = \{f_i(\cdot,\cdot,\cdot,...)\}^{\mathsf{T}}, \qquad \boldsymbol{g}(\cdot,\cdot,\cdot,...) = \{g_i(\cdot,\cdot,\cdot,...)\}^{\mathsf{T}}$$

– известные непрерывные векторные функции своих аргументов, $\mathbb{F}$ и $\mathbb{G}$ – непрерывные операторы, действующие из пространства $\mathbb{R}^{\mathsf{n}} \times \mathbb{R}^{\mathsf{n}} \times \mathbb{R}^{\mathsf{n}} \times \mathbb{R}^{\mathsf{n}} \times \mathbb{R}^{\mathsf{n}} \times \mathbb{R}^{\mathsf{n}} \times ... \times \mathbb{R}$ в пространство $\mathbb{R}^{\mathsf{n}}$:

$$\mathbb{F}\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau), \boldsymbol{u}'_t(\boldsymbol{x},t-\tau), t\big] = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau),$$
$$\boldsymbol{u}'_t(\boldsymbol{x},t-\tau), \boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t-\tau), \boldsymbol{u}'_{tx}(\boldsymbol{x},t-\tau),$$
$$\boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t-\tau), \boldsymbol{u}'_{txx}(\boldsymbol{x},t-\tau), ..., t\big),$$

$$\mathbb{G}\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau), \boldsymbol{u}'_t(\boldsymbol{x},t-\tau), t\big] = \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau),$$
$$\boldsymbol{u}'_t(\boldsymbol{x},t-\tau), \boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t-\tau), \boldsymbol{u}'_{tx}(\boldsymbol{x},t-\tau),$$
$$\boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t-\tau), \boldsymbol{u}'_{txx}(\boldsymbol{x},t-\tau), ..., t\big),$$

T – символ транспонирования.

Предположим, что на полуинтервале $(t_0, t_1]$, неизвестное векторное поле $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$ удовлетворяет следующей системе ДУвЧП:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = \mathbb{F}_0\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t), t\big], \tag{3}$$

$$\mathbb{F}_0\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t), t\big] = \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x}, t), ..., t\big), \tag{4}$$

а также начальным

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t_0) = \boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x}) \tag{5}$$

и краевым

$$\mathbb{G}_0\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t), t\big] = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{x} \in \partial\mathbb{D}, \tag{6}$$

$$\mathbb{G}_0\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t), t\big] = \boldsymbol{g}_0\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x}, t), ..., t\big) \tag{7}$$

(в случае ограниченной области) условиям, где $\mathbb{F}_0$ и $\mathbb{G}_0$ – непрерывные операторы, действующие из пространства $\mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \times \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \times \mathbb{R}^{\mathfrak{n}} \times ... \times \mathbb{R}$ в пространство $\mathbb{R}^{\mathfrak{n}}$, $\boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x})$ – заданное векторное поле, $\boldsymbol{f}_0(\cdot, ...) = \{f_{0i}(\cdot, ...)\}^{\mathsf{T}}$ и $\boldsymbol{g}_0(\cdot, ...) = \{g_{0i}(\cdot, ...)\}^{\mathsf{T}}$ – известные непрерывные векторные функции своих аргументов.

Пусть структура функций $\boldsymbol{u}^0$, $\boldsymbol{f}_0$, $\boldsymbol{g}_0$, $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ такова, что задача (1)–(7) имеет решение и при том единственное. Тогда цель исследования будет состоять в изучении поведения векторного поля $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$, описываемого уравнениями (1)–(7) на основе приближенно-аналитических процедур.

2. Описание предлагаемой схемы

Для решения поставленной задачи преобразуем ее в последовательность проблем, каждая из которых проще исходной и имеет множество возможных стандартных путей решения, а именно, для того чтобы исследовать изменения поля $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$, удовлетворяющего уравнениям с запаздываниями, при значениях времени $t > t_0$ построим цепочку управляющих векторным полем уравнений без запаздывания, расширив пространство состояний. Для реализации этой процедуры введем следующие переменные и обозначения:

$$s \in [0, \tau], \quad t_q = t_0 + q \cdot \tau, \quad q = 0, 1, 2, ..., N, N+1, \quad t_{N+1} \geqslant T,$$

$$\boldsymbol{u}_q(\boldsymbol{x},s)=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},s_q),\quad s_q=s+t_q,\quad \Delta_q=(t_q,t_{q+1}],\quad \overline{\Delta}_q=[t_q,t_{q+1}],$$
$$\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},0)=\boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{u}_q(\boldsymbol{x},0)=\boldsymbol{u}_{q-1}(\boldsymbol{x},\tau),$$

а затем рассмотрим последовательность полуотрезков Δ_q.

0°. Начнем с Δ_0. Определенная на этом полуинтервале векторная функция $\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s)$ удовлетворяет системе (штрихом здесь и далее обозначена производная по переменной s)

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s)}{\partial s}=\mathbb{F}_0\big[\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s),s_0\big],\quad \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},0)=\boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{D},$$
$$\mathbb{G}_0\big[\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s),s_0\big]=\boldsymbol{0},\qquad \boldsymbol{x}\in\partial\mathbb{D}.$$

1°. Проанализируем поведение системы на отрезках Δ_0 и Δ_1. ДУвЧП для вычисления векторных полей $\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s)$ и $\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x},s)$ можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s)}{\partial s}=\mathbb{F}_0\big[\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s),s_0\big],\quad \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},0)=\boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{D},$$
$$\mathbb{G}_0\big[\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s),s_0\big]=\boldsymbol{0},\qquad \boldsymbol{x}\in\partial\mathbb{D},$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x},s)}{\partial s}=\mathbb{F}\big[\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{u}'_{0s}(\boldsymbol{x},s),s_1\big],\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{D},$$
$$\mathbb{G}\big[\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{u}'_{0s}(\boldsymbol{x},s),s_1\big]=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{x}\in\partial\mathbb{D}.$$

... ...

N°. Рассмотрим полусегменты Δ_0, Δ_1, ..., Δ_N. Построим систему уравнений для векторов $\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s)$, $\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x},s)$, ..., $\boldsymbol{u}_N(\boldsymbol{x},s)$ в виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s)}{\partial s}=\mathbb{F}_0\big[\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s),s_0\big],\quad \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},0)=\boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{D},$$
$$\mathbb{G}_0\big[\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s),s_0\big]=\boldsymbol{0},\qquad \boldsymbol{x}\in\partial\mathbb{D},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x},s)}{\partial s}=\mathbb{F}\big[\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{u}'_{0s}(\boldsymbol{x},s),s_1\big],\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{D},$$
$$\mathbb{G}\big[\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{u}'_{0s}(\boldsymbol{x},s),s_1\big]=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{x}\in\partial\mathbb{D},$$

... ...

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_N(\boldsymbol{x},s)}{\partial s} = \mathbb{F}\big[\boldsymbol{u}_N(\boldsymbol{x},s), \boldsymbol{u}_{N-1}(\boldsymbol{x},s), \boldsymbol{u}'_{N-1,s}(\boldsymbol{x},s), s_N\big], \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{D},$$
$$\mathbb{G}\big[\boldsymbol{u}_N(\boldsymbol{x},s), \boldsymbol{u}_{N-1}(\boldsymbol{x},s), \boldsymbol{u}'_{N-1,s}(\boldsymbol{x},s), s_1\big] = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\mathbb{D}.$$

Итак, исходная начально-краевая задача для ДРУНТвЧП сведена к серии начально-краевых задач для систем ДУвЧП без запаздывания для цепочки векторных полей состояния увеличивающейся размерности. При этом исследование поведения системы будет состоять в последовательном приближенно-аналитическом и/или численном интегрировании уравнений на отрезке $[0,\tau]$ (шаги $\mathbf{0}^\circ$–$\mathbf{N}^\circ$), включая смену системы уравнений и доопределение недостающих для очередного шага начальных условий с помощью терминальных значений для предыдущего.

3. Пример

Для реализации изложенной процедуры в рамках одного шага, исходя из конкретной задачи (вида уравнений, области и заданных начально-краевых условий) можно применить наиболее пригодный или удобный метод. Далее в примерах для решения соответствующих ДУвЧП в среде ПКА Mathematica использовалась функция NDSolve с опцией "MethodOfLines", определяющая применение метода прямых с пространственной дискретизацией в форме конечных элементов (параметр "SpatialDiscretization"→"FiniteElement").

Рассмотрим следующую модельную систему двух ДУвЧПНТ с кратными запаздываниями:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial t}\big[u_1(x,t) - \gamma_{11}\, u_1(x,t-\frac{\pi}{2})\big] + \omega_1^2\,\big[u_1(x,t) - \gamma_{12}\, u_1(x,t-\pi)\big] = \\
= \alpha_{11}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big[u_1(x,t) - \gamma_{13}\, u_1(x,t-\frac{\pi}{2})\big] + \\
+\alpha_{12}\,\frac{\partial}{\partial x}\big[u_1(x,t) - \gamma_{14}\, u_1(x,t-\pi) - \gamma_{15}\, u_2(x,t-\pi)\big] + \\
+\alpha_{13}\,\big[u_1(x,t) - \gamma_{16}\, u_1(x,t-\pi) - \gamma_{17}\, u_2(x,t-\pi)\big], \qquad (8) \\
\frac{\partial}{\partial t}\big[u_2(x,t) - \gamma_{21}\, u_2(x,t-\frac{\pi}{2})\big] + \omega_2^2\,\big[u_2(x,t) - \gamma_{22}\, u_2(x,t-\pi)\big] = \\
= \alpha_{21}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big[u_2(x,t) - \gamma_{23}\, u_2(x,t-\frac{\pi}{2})\big] +
\end{gathered}$$

$$+\alpha_{22}\,\frac{\partial}{\partial x}\big[u_2(x,t)-\gamma_{24}\,u_2(x,t-\pi)-\gamma_{25}\,u_1(x,t-\pi)\big]+$$
$$+\alpha_{23}\,\big[u_2(x,t)-\gamma_{26}\,u_2(x,t-\pi)-\gamma_{27}\,u_1(x,t-\pi)\big], \qquad (9)$$
$$0<x<1, \quad t>0;$$
$$u_1(0,t)=u_1(1,t)=1, \quad u_2(0,t)=u_2(1,t)=2, \quad t\geqslant -\pi,$$
$$\begin{array}{l} u_1(x,t)=1+0{,}5\,\sin 2\,\pi\,x-0{,}25\,\sin 5\,\pi\,x, \\ u_2(x,t)=2-0{,}5\,\sin 4\,\pi\,x+0{,}25\,\sin 7\,\pi\,x, \end{array} \quad -\pi\leqslant t\leqslant 0.$$

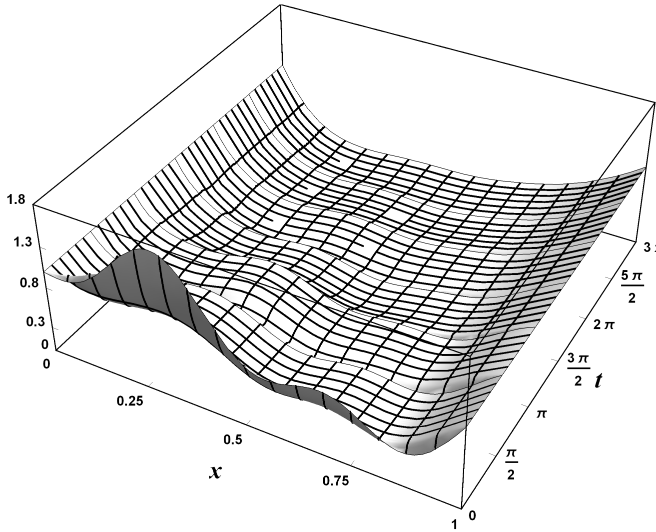

Рис. 1

Результаты расчетов для $\tau=\pi/2$ и

$$\gamma_{11}=\gamma_{12}=\gamma_{13}=1/2, \qquad \gamma_{14}=\gamma_{15}=\gamma_{16}=\gamma_{17}=1/4,$$
$$\gamma_{21}=\gamma_{22}=\gamma_{23}=2/5, \qquad \gamma_{24}=\gamma_{25}=\gamma_{26}=\gamma_{27}=1/5,$$
$$\alpha_{11}=1/10, \quad \alpha_{12}=1, \quad \alpha_{13}=1/4, \quad \omega_1=2,$$
$$\alpha_{21}=1/8, \qquad \alpha_{22}=3/2, \qquad \alpha_{23}=1/2, \quad \omega_2=3$$

представлены в виде графиков (3D-поверхностей и линий уровня в переменных $x-t$) на рис. 1–4.

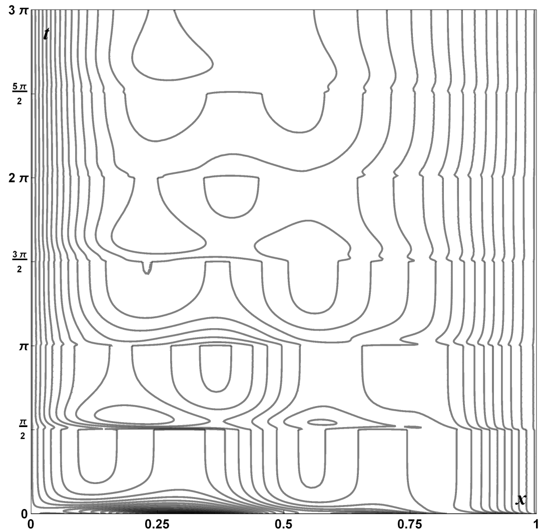
3 π
t
5 π
2
2 π
3 π
2
π
π
2
0
x
0
0.25
0.5
0.75
1

Рис. 2

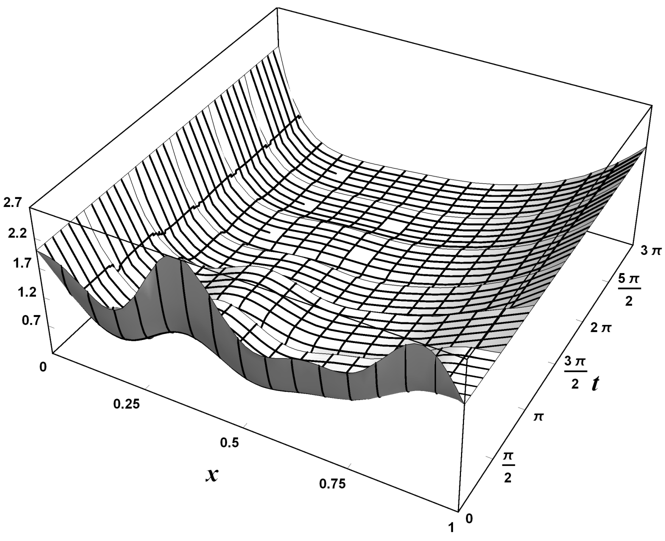
2.7
2.2
1.7
1.2
0.7
0
0.25
0.5
x
0.75
1
0
π
2
π
3 π
2
t
2 π
5 π
2
3 π

Рис. 3

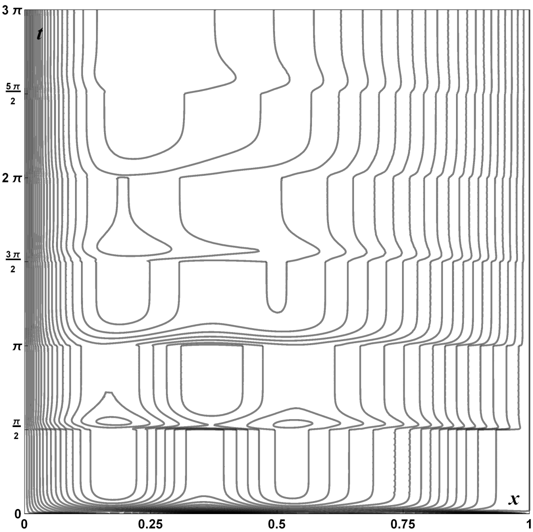

Рис. 4

Заключение

Алгоритм, описанный в данной статье, может быть эффективно реализован на основе и любого другого современного ПКА, такого как Maple или Matlab, и использован для изучения многих типов систем с последействием, описываемых ФДУвЧП.

Как и в случае применения схеме МШРПС для анализа обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием и нейтрального типа, реализация представленной схемы для исследования ФДУНТвЧП потребовала минимальных усилий и оказалась эффективной, причем время расчетов для исследованной системы оказалось незначительным.

Библиографический список

1. *Ахмеров Р.Р., Каменский М.И., Потапов А.С., Родкина А.Е., Садовский Б.Н.* Теория уравнений нейтрального типа // Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ. 1982. Т. 19. С. 55–126.

2. *Василишин С.А., Фодчук В.И.* О построении асимптотических решений для квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных с запаздыванием по времени // Украинский математический журнал. 1967. Т. 19, № 4. С. 108–113.

3. *Квапиш И., Туро Я.* О приближенных итерациях для дифференциально-функционального уравнения в частных производных гиперболического типа в банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения. 1975. Т. 11, № 9. С. 1626–1640.

4. *Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981. 448 с.

5. *Маланин В.В., Полосков И.Е.* Численно-аналитические схемы анализа детерминированных систем с последействием // Вестник РУДН. Серия "Математика. Информатика. Физика". 2010. № 2, вып. 2. С. 31–36.

6. *Непомнящая Е.М., Садовский Б.Н.* О методе последовательных приближений для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа // Труды математического фак-та. Воронежский ун-т, 1972. Вып. 6. С. 59–68.

7. *Пименов В.Г.* Численные методы решения уравнения теплопроводности с запаздыванием // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008. № 2. С. 113–116.

8. *Пименов В.Г.* Разностные схемы в моделировании эволюционных управляемых систем с последействием // Тр. ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16, № 5. С. 151–158.

9. *Пименов В.Г., Ложников А.Б.* Разностные схемы численного решения уравнения теплопроводности с последействием // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 178–189.

10. *Полосков И.Е.* Расширение фазового пространства в задачах анализа дифференциально-разностных систем со случайным входом // Автоматика и телемеханика. 2002. № 9. С. 58–73.

11. *Полосков И.Е.* Движение транспортного средства по дороге со случайным профилем с учетом запаздывания // Математическое моделирование. 2005. Т. 17, № 3. С. 3–14.

12. *Полосков И.Е.* Применение схемы расширения фазового пространства для анализа систем с распределенными параметрами и запаздыванием // Вестник Пермского ун-та. Информационные системы и технологии. 2011. Вып. 12 (38). С. 64–69.

13. *Фодчук В.И.* Метод усреднения для дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Украинский математический журнал. 1968. Т. 20, № 2. С. 203–209.

14. *Фодчук В.И.* Применение асимптотических методов к дифференциальным уравнениям в частных производных нейтрального типа // Дифференциально-разностные уравнения. Киев, 1971. С. 184–193.

15. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.

16. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.

17. *Adimy M., Ezzinbi Kh.* A class of linear partial neutral functional–differential equations with nondense domain // Journal of Differential Equations. 1998. Vol. 147, № 2. P. 285–332.

18. *Agarwal S., Bahuguna D.* Exact and approximate solutions of delay differential equations with nonlocal history conditions // Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. 2005. Vol. 2005, № 2. P. 181–194.

19. *Bainov D.D., Mishev D.* Oscillation theory for neutral differential equations with delay. Bristol, Philadelphia, New York: Adam Hilger, 1991. VIII, 280 p.

20. *Bellen A., Zennaro M.* Numerical methods for delay differential equations. Oxford: Oxford University Press, 2003. XIV, 395 p.

21. *Briat C.* Linear parameter-varying and time-delay systems: Analysis, observation, filtering & control. Berlin, Heidelberg: Springer, 2015. XVIII, 394 p.

22. *Corduneanu C., Li Yi., Mahdavi M.* Functional differential equations: Advances and applications. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2016. XVI, 342 p.

23. *Datko R.* Linear autonomous neutral differential equations in a Banach space // Journal of Differential Equations. 1977. Vol. 25, № 2. P. 258–274.

24. *Fliess M., Mounier H., Rouchon P., Rudolph J.* Controllability and motion planning for linear delay systems with an application to a flexible rod // Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control. New Orleans, LA: IEEE, 1995. Vol. 2. P. 2046–2051.

25. *Fowler A.C.* Asymptotic methods for delay equations // Journal of Engineering Mathematics. 2005. Vol. 53, № 3–4. P. 271–290.

26. *Fu X., Ezzinbi K.* Existence of solutions for neutral functional differential evolution equations with nonlocal conditions // Nonlinear Analysis. 2003. Vol. 54, № 2. P. 215–227.

27. *Gil' M.I.* Stability of neutral functional differential equations. Paris: Atlantis Press, 2014. XIII, 304 p.

28. *Gourley S.A., So J.W.-H., Wu J.H.* Nonlocality of reaction–diffusion equations induced by delay: biological modeling and nonlinear dynamics // Journal of Mathematical Sciences. 2004. Vol. 124, № 4. P. 5119–5153.

29. *Hale J.K., Meyer K.R.* A class of functional equations of neutral type // Memoirs of the American Mathematical Society, № 76. Providence: AMC, 1967. 65 p.

30. *Hale J.K.* Theory of functional differential equations. New York: Springer, 1977. X, 366 p.

31. *Hale J.K, Lunel S.M.V.* Introduction to functional differential equations. New York: Springer, 1993. X, 447 p.

32. *Hale J.K.* Partial neutral functional differential equations // Revue Roumaine De Mathematiques Pures et Appliquees. 1994. Vol. 39, № 4. P. 339–344.

33. *Hernández E., Henriquez H.R.* Existence results for partial neutral functional differential equations with unbounded delay // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1998. Vol. 221, № 5. P. 452–475.

34. *Huang C., Vandewalle S.* An analysis of delay-dependent stability for ordinary and partial differential equations with fixed and distributed delays // SIAM Journal on Scientific Computing. 2004. Vol. 25, № 5. P. 1608–1632.

35. *Jackiewicz Z., Zubik-Kowal B.* Spectral collocation and waveform relaxation methods for nonlinear delay partial differential equations // Applied Numerical Mathematics. 2006. Vol. 56, № 3–4. P. 433–443.

36. *Kolmanovskii V.B., Nosov V.R.* Stability of functional differential equations. London: Academic Press, 1986. XIV, 217 p.

37. *Kolmanovskii V., Myshkis A.* Applied theory of functional differential equations. Mathematics and its Applications. Dordrecht: Springer, 1992. XVI, 234 p.

38. *Kuang Y.* Delay differential equations: With applications in population dynamics. Boston: Academic Press, 1993. XII, 398 p.

39. *Kyrychko Y.N., Hogan S.J.* On the use of delay equations in engineering applications // Journal of Vibration and Control. 2010. Vol. 16, № 7/8. P. 943–960.

40. *Mangano S.* Mathematica cookbook. Cambridge: O'Reilly, 2010. XXIV, 800 p.

41. *Michiels W., Engelborghs K., Roose D., Dochain D.* Sensitivity to infinitesimal delays in neutral equations // SIAM Journal on Control and Optimization. 2001. Vol. 40, № 4. P. 1134–1158.

42. *Rey A.D., Mackey M.C.* Multistability and boundary layer development in a transport equation with delayed arguments // Canadian Applied Mathematics Quarterly. 1993. Vol. 1, № 1. P. 61–81.

43. *Tanthanuch J., Meleshko S.V.* On definition of an admitted Lie group for functional differential equations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2004. Vol. 9. P. 117–125.

44. *Van der Houwen P.J., Sommeijer B.P., Baker C.T.H.* On the stability of predictor–corrector methods for parabolic equations with delay // IMA Journal of Numerical Analysis. 1986. Vol. 6, № 1. P. 1–23.

45. *Wearing H.J., Rohani P., Keeling M.J.* Appropriate models for the management of infectious diseases // PLOS Medicine. 2005. Vol. 2, № 7. P. 621–627.

46. *Wiener J.* Boundary value problems for partial differential equations with piecewise constant delay // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 1991. Vol. 14, № 2. P. 363–380.

47. *Wu J.* Theory and applications of partial functional differential equations. New York: Springer-Verlag, 1996. X, 432 p.

48. *Wu Sh., Gan S.* Analytical and numerical stability of neutral delay integro-differential equations and neutral delay partial differential equations // Computers and Mathematics with Applications. 2008. Vol. 55, № 11. P. 2426–2443.

49. *Zubik-Kowal B.* Stability in the numerical solution of linear parabolic equations with a delay term // BIT Numerical Mathematics. 2001. Vol. 41, № 1. P. 191–206.

50. *Zubik-Kowal B., Vandewalle S.* Waveform relaxation for functional-differential equations // SIAM Journal on Scientific Computing. 1999. Vol. 21, № 1. P. 207–226.