ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ
Нелинейные динамические системы

Вып. 49 Межвузовский сборник научных трудов 2017

УДК 531.53

Н. Н. Макеев
Институт проблем точной механики и управления РАН
Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, 24
nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

ДИНАМИКА ТОКОПРОВОДЯЩЕГО МАЯТНИКА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Приводится анализ топологической структуры фазовых траекторий динамической системы, характеризующей медленные маятниковые движения твёрдого тела, несущего два плоских ортогонально расположенных электропроводящих контура. Движение тела совершается в переменном высокочастотном магнитном поле, частота колебаний которого намного больше собственной частоты колебаний маятника. Анализ структуры фазовых траекторий проводится методами малого параметра и приводимости нелинейных динамических систем.

Ключевые слова: маятник; электрический контур; нелинейная динамическая система; магнитное поле; приводимость.

Введение

Вопросы теории маятниковых движений токопроводящих твёрдых тел в магнитном поле имеют применение в прикладных задачах динамики сложных механических систем, несущих контурные силовые элементы с электроприводом. Исследования динамических свойств этих объектов ввиду существенной нелинейности их аналитического представления проводится в основном качественными методами теории *динамических систем*

(ДС). Одним из распространённых приёмов решения этих задач является метод малого параметра (метод Л.С.Понтрягина), применяемый для возмущённой гамильтоновой системы, близкой к консервативной. Этот метод позволяет выделить множество точек области значений параметров ДС, на котором происходит распад предельных циклов этой системы.

1. Структура траекторного многообразия системы

Последующее изложение является продолжением исследования, проведённого в работе [1].

Рассмотрим движение маятника, несущего двухконтурную электропроводящую систему, в высокочастотном магнитном поле. В соответствии с постановкой задачи [1] это движение аппроксимируется уравнением [2]

$$\ddot{\theta} + \mu a\dot{\theta} + f(\theta) = \lambda, \tag{1}$$

где $f(\theta) = (1 + b\cos\theta)\sin\theta$; $a = \alpha F_0^2, b = \beta F_0^2$; точка сверху обозначает дифференцирование по τ – безразмерному времени.

В уравнении (1) обозначено: θ − угол отклонения маятника от положения равновесия; α, β − параметры контурной токопроводящей системы, определяемые её конструкцией, физическими характеристиками магнитного поля и электротока в контурных проводниках; $F_0 \neq 0$ − заданная структурная постоянная магнитного поля; λ − величина постоянного внешнего моментно-силового воздействия на маятник; $\tau = \nu t$, где ν − частота магнитного поля; t − натуральное время. При этом величина $b\cos\theta\sin\theta$ в первом приближении характеризует потенциальные электромагнитные, а величина $a\dot{\theta}$ − "формально диссипативные" силы [3].

Уравнение (1) эквивалентно динамической системе

$$\dot{\theta} = \varphi, \quad \dot{\varphi} = \lambda - \mu a\varphi - f(\theta) \ \ (-\pi \le \theta \le \pi). \tag{2}$$

Динамическая система (2) является возмущённой системой, близкой к консервативной гамильтоновой системе, которую можно представить в виде

$$\dot{\theta} = H'_{\varphi}, \quad \dot{\varphi} = -H'_{\theta} - \mu a\varphi. \tag{3}$$

Здесь $H'_{\varphi}, H'_{\theta}$ − аналитические функции всех своих аргументов;

$$H(\theta,\varphi)=\frac{1}{2}\varphi^2-\Psi(\theta)$$

– функция Гамильтона; штрих обозначает дифференцирование по указанной переменной;

$$\Psi(\theta)=\lambda\theta+Q(\theta),$$

$$Q(\theta)=(1+0.5b\cos\theta)\cos\theta.$$

Для невозмущённой (при $\mu = 0$) динамической системы (3) имеет место однозначный аналитический первый интеграл

$$H(\theta,\varphi)=h \qquad (h=const). \tag{4}$$

Рассмотрим структуру траекторий возмущённой ДС (3) на фазовой плоскости $(\theta,\dot{\theta})$ при $\lambda = 0$. Положения равновесия этой системы определяются величиной параметра *b*. При $b\le 1$ двухконтурная система имеет устойчивое нижнее (относительно точки подвеса) положение равновесия $\theta_1=0$ (устойчивый фокус на фазовой плоскости) и неустойчивое верхнее положение $\theta_2 = \pi$.

При $b > 1$ имеются седловые положения равновесия, определяемые условиями

$$(\theta_3,\theta_4)=\pi\mp\gamma, \qquad \gamma=\arccos b^{-1}.$$

Здесь при $a > 0$ верхнее и нижнее положения равновесия устойчивы. Устойчивость верхнего положения в этом случае обусловливается стабилизирующим воздействием осциллирующих сил электромагнитного поля [4].

Если $a = 0$, то устойчивый фокус в положениях равновесия θ_1, θ_2 вырождается в сложный фокус первого порядка. Тогда в этой системе возможно возникновение автоколебаний: с частотой $\Omega_1=\sqrt{b+1}$ вблизи нижнего положения равновесия и с частотой $\Omega_2=\sqrt{b-1}$ вблизи верхнего положения. При этих автоколебаниях возможно образование предельных циклов. Это структурное перерождение возникает при уменьшении значений диссипативного параметра *a*, вследствие чего положения равновесия системы θ_1, θ_2 теряют устойчивость.

Распад автоколебаний, возникающих вблизи данных положений равновесия, может произойти при дальнейшем уменьшении значений величины параметра a. Множество точек области значений параметров, на котором происходит распад предельных циклов, определяется методом малого параметра (*методом Л.С. Понтрягина* [2, 5]) для квазиконсервативных ДС.

Введём функцию Понтрягина для ДС (3) при $a \neq 0$, $b > 0$, $\lambda = 0$, составленную в силу первого интеграла (4)

$$I(\theta_3, \theta_4, h) = a\sqrt{2}\int_{\theta_3}^{\theta_4}\sqrt{Q(\theta)+h}\,d\theta, \qquad (5)$$

где θ_3, θ_4 – координаты седловых особых точек, расположенных на сепаратрисе; h – показатель уровня энергии системы, соответствующий режиму движения фазовой точки по сепаратрисе.

Из соотношения (5) при условиях $h = (2b)^{-1}$ и $\theta_0 = \theta_2$, $\varphi_0 = \pm\Omega_2^2\, b^{-1/2}$ следует

$$I(\theta_3, \theta_4, (2b)^{-1}) = 2ab^{-1/2}(\gamma - \sigma) \equiv I_1, \qquad (6)$$

где обозначено $\gamma = \arccos b^{-1}, \sigma = \sqrt{b^2 - 1} = \Omega_1\Omega_2$.

Как известно [2], слиянию предельного цикла с сепаратрисой невозмущённой ДС (3) соответствует нуль выражения функции Понтрягина I_1 (6). Следовательно, значение параметра b, при котором вблизи положения равновесия $\theta = \theta_2$ предельный цикл распадается, согласно равенству (6) определяется уравнением $I_1 = 0$, или $1 - b\cos\sigma = 0$, корень которого $b = 1$.

Аналогичным образом получаем выражение для определения значения параметра b, при котором возможен распад предельного цикла вблизи положения равновесия $\theta = \theta_1$. Здесь аналогом выражения (6) в силу соотношения (5) является

$$I(-\pi + \gamma, \pi - \gamma, (2b)^{-1}) = 2\pi ab^{-1/2} - I_1 = I_2. \qquad (7)$$

Нуль выражения для I_2 соответствует корню $b = -1$ уравнения $1 + b\cos\sigma = 0$. Поскольку для токопроводящих контурных систем реально имеем $b > 0$ [3], то распада предельного цикла вблизи положения равновесия $\theta = \theta_1$ не происходит. Таким образом, распад предельного цикла возможен лишь вблизи положения равновесия $\theta = \theta_2$ при $b = 1$.

Примечательно, что выражения (6), (7) содержат характерный параметр $\sigma = \Omega_1\Omega_2$, где Ω_1, Ω_2 − частоты автоколебаний вблизи нижнего и верхнего положения равновесия маятника, соответственно, при которых возможно образование предельных циклов.

2. Равномерная асимптотическая устойчивость

Исследуем асимптотическую устойчивость начала координат фазовой плоскости (θ, φ) исходного уравнения двухконтурной маятниковой системы.

Обозначим: $F = F\,(\theta)$ − заданная характерная функция класса $\mathrm{C}^1[0, \pi]$, $F_\theta = F'(\theta)$ (штрих сверху означает дифференцирование по θ);

$$p\,(\theta) = F^2 + F_\theta^2, \quad q\,(\theta) = \sin\theta + \beta F F_\theta.$$

Тогда более общее уравнение движения двухконтурной маятниковой системы по сравнению с уравнением (1) в данных обозначениях имеет вид [1]

$$\ddot{\theta} + \mu\alpha\, p\,(\theta)\,\dot{\theta} + q\,(\theta) = \lambda \quad (0 \le \theta \le \pi). \tag{8}$$

Пусть для указанных значений θ выполняются условия:

1. Существуют функции $p_1(\theta)$, $p_2(\theta)$ из класса $\mathrm{C}^0[0, \pi]$, такие, что для значений $\dot{\theta} \ne 0$ имеет место оценка

$$0 < p_1(\theta) \le \mu\alpha\, p\,(\theta) \le p_2(\theta). \tag{9}$$

2. Для значений $\theta \in [0, \pi]$ имеем

$$\theta\, q\,(\theta) > 0, \quad q\,(0) = 0. \tag{10}$$

3. В уравнении (8) $\lambda = 0$.

Условия (9) выполняются, если подобрать действительные числа ν_1, ν_2 такие, что $0 < \nu_1 \le \mu\alpha \le \nu_2$. В силу этого можно принять $(p_1, p_2) = (\nu_1, \nu_2)\, p\,(\theta)$.

Первое условие (10) для $\theta \in [0, \pi]$ заведомо выполняется при $FF_\theta > 0$, а второе выполняется, если $F(0)F_\theta(0) = 0$ при $\beta \neq 0$. Условие 3 характерно для контурных токопроводящих систем маятникового типа, движущихся в магнитном поле при регулярном режиме.

Если данные условия выполняются, то, согласно теореме В.М.Матросова [6, 7] об устойчивости, справедливы следующие утверждения.

1. Для любых значений τ_0, θ_0 из множества возможных в пределе имеем

$$\theta(\tau, \tau_0, \theta_0) \to 0 \quad (\tau \to +\infty) \tag{11}$$

равномерно по τ_0, θ_0.

2. Состояние маятниковой системы

$$\theta = 0, \quad \dot{\theta} = 0, \tag{12}$$

определяемое для принятых ограничений решением уравнения (8), равномерно асимптотически устойчиво.

Для уравнения движения маятника в форме (8) имеем $p(\theta) \equiv 1$, $q(0) = 0$ и при $\lambda = 0$ условия (9) могут быть выполнены, а первое условие (10) для значений $0 < b < 1$ безусловно выполняется.

Таким образом, при данных ограничениях для маятникового движения системы в магнитном поле условия (11), (12) выполняются и начало координат фазовой плоскости (θ, φ) равномерно асимптотически устойчиво.

3. Частные виды маятниковых движений

Рассмотрим некоторые преобразования нелинейной динамической системы маятника, позволяющие в определённых случаях путём применения специального приёма выполнить её приведение к линейной динамической системе с постоянными коэффициентами. Применим этот приём, называемый *точной линеаризацией*, основываясь на предпосылках работы [8].

Для ДС (8) примем зависимость

$$q(\theta) = \lambda + p(\theta)\left[b_0 \int p(\theta)\, d\theta + \frac{c}{n} \right], \tag{13}$$

где $(b_0, n) \neq 0$, c – заданные постоянные (здесь вообще $c \neq 0$).

Зависимость (13) в применении к ограниченной М-задаче налагает ограничение на выбор характерной величины $F(\theta)$ – функции амплитуды магнитного поля.

Выполним преобразование $\theta \to X, t \to \tau$ согласно равенствам

$$X(\theta) = n \int p(\theta)\, d\theta, \quad d\tau = p\,(\theta)\, dt. \tag{C}$$

Тогда, в силу зависимости (13), имеем

$$X\,(\theta) = \frac{1}{b_0}\left[\frac{n}{p}(q - \lambda) - c\right] \tag{14}$$

и ДС (8) преобразуется в линейную ДС вида

$$X'' + \mu\alpha X' + b_0 X + c = 0. \tag{15}$$

Здесь штрих – символ дифференцирования по τ.

Пусть $r_j\ (j = 1, 2)$ – действительные корни характеристического уравнения ДС (15) и параметр $c \neq 0$. Тогда общие решения ДС (15) в параметрической форме имеют вид:

$$1)\ X(\tau) = C_1 \exp\,(r_1 \tau) + C_2 \exp\,(r_2 \tau) - m_0 \tag{16}$$

при

$$\delta_0 = (\mu\alpha)^2 - 4b_0 > 0\ (r_1 \neq r_2, r_j \neq 0),\ m_0 = \frac{c}{b_0};$$

$$2)\ X(\tau) = (C_1 \tau + C_2) \exp\,(-\,0.5\,\mu\alpha\tau) - m_0 \tag{17}$$

при $\delta_0 = 0$, $\alpha \neq 0$ $(r_1 = r_2 = -\,0.5\,\mu|\alpha|)$,

$$3)\ X\,(\tau) = B_1 \sin\,(\sqrt{b_0}\ \tau + B_2) - m_0 \tag{18}$$

при $\alpha = 0$, $b_0 > 0$,

$$4)\ X(\tau) = B_1 \mathrm{sh}\,(\sqrt{-\,b_0}\ \tau + B_2) - m_0 \tag{19}$$

при $\alpha = 0$, $b_0 < 0$.

Здесь $C_j, B_j\ (j = 1, 2)$ – постоянные интегрирования.

Решения (16), (17) характеризуют режимы движения маятника с диссипацией, тогда как решения (18), (19) соответствуют его движениям без диссипации.

К зависимостям (16)−(19) следует присоединить соотношение связи, получаемое в силу равенств (С)

$$t = \int p^{-1}[\theta(\tau)]\,d\tau\,. \tag{20}$$

Далее предполагается обратимость зависимости (20).

Соотношения (16)−(20) определяют полное (при наличии ограничения (13)) параметрически заданное интегральное многообразие ДС (8), параметризованное переменной $\tau \in [0, +\infty)$, при $(b_0, n) \neq 0$. Если зависимость (20) обратима, то в силу соотношений (16)−(19) получаем явную зависимость вида $X = X(t)$.

Рассмотрим случай, при котором в равенствах (13), (14) $c = 0$. Здесь ДС (8) допускает параметрические решения

$$r_j t + C_j = \frac{1}{n}\int \frac{d\theta}{X(\theta)} \equiv \psi(\theta) \quad (j = 1, 2), \tag{21}$$

где r_j − простые корни характеристического уравнения данной ДС и $X(\theta) \neq 0$ для $\theta \in [0, \pi]$. Постоянные C_j в равенствах (21) удовлетворяют уравнениям

$$\theta = C_j + n^{-1} r_j \int X(\theta)\,d\theta \quad (j = 1, 2). \tag{22}$$

В случае кратных корней r_j вместо равенств (21) имеем

$$C_j - 0.5\mu\alpha t + (j-1)\int \tau^{-1}(t)\,dt = \psi(\theta) \quad (j = 1, 2),$$

где $\tau(t)$ – обращённая зависимость вида (20).

Равенства (22) являются интегральными уравнениями относительно переменной θ, определяющими для каждого значения r_j постоянные C_j при фиксированном значении $\theta \in [0, \pi]$.

В режиме движения без диссипации (при $\alpha = 0$) общее решение ДС (8) представляется в виде

$$t = \pm n|b_0|^{-1/2} \int \left[D_1 \mp (X(\theta) + m_0)^2\right]^{-1/2} d\theta + D_2\,, \tag{23}$$

где D_j ($j = 1, 2$) − постоянные интегрирования. Здесь в подкоренном выражении подынтегральной функции знаки $\pm$ совпадают со знаком соответствующего выбранного параметра $b_0 > 0$ и $-b_0 < 0$, соответственно.

Обращённая из (23) зависимость вида $\theta = \theta(t)$, если она аналитически представима, при каждом конкретном выборе знака определяет явную форму решения ДС (8).

Пусть, в отличие от предыдущего, $b_0 = 0$, $(n, c) \neq 0$. При данных условиях вид заданного соотношения связи (13) сохраняется. Применяя к ДС (8) преобразование (С), в силу которого

$$X(\theta) = m_1[\int q(\theta)\, d\theta - \lambda\theta], \tag{24}$$

где $m_1 = n^2 c^{-1}$, получаем ДС (15) при $b_0 = 0$. При этом зависимость (24) представима в виде

$$X(\theta) = m_1(0.5\beta F^2 - \cos\theta - \lambda\theta).$$

Для данного случая общие решения ДС (15) имеют вид:

− при $\alpha \neq 0$

$$X(\tau) = C_1 + C_2 \exp(-\mu\alpha\tau) - (\mu\alpha)^{-1} c\tau; \tag{25}$$

− при $\alpha = 0$

$$X(\tau) = C_1 + C_2\tau - \frac{1}{2} c\tau^2. \tag{26}$$

К зависимостям (25), (26) следует присоединить соотношение связи (20).

Таким образом, для всех указанных случаев интегрируемости получены точные аналитические зависимости вида $X(\tau)$. Если первое соотношение (С) обратимо, то можно получить зависимость вида $\theta = \theta(X)$ и, следовательно, выражение вида $\theta = \theta\,[X(\tau)]$. При этом, если соотношение (20) также обратимо (в силу чего можно получить явную зависимость вида $\tau = \tau(t)$), получаем в явной форме решение ДС (8) вида $\theta = \theta(t)$, что и решает поставленную *М*-задачу.

В качестве примера рассмотрим ДС (15), соответствующую системе (8), для которой с точностью до аддитивной произвольной постоянной $p(\theta) = F_0^2 \neq 0$.

Здесь, согласно соотношениям (С), имеем $X(\theta) = n_0\theta$, $\tau = F_0^2 t$, где $n_0 = nF_0^2 \neq 0$.

Если, в частности, за решение данной ДС принять соотношение (21) при $C_j = 0$, то для $\theta \in [0, \pi]$ имеем

$$\theta_j(t) = \theta_j(0)\exp(\rho r_j t) \quad (j = 1, 2),$$

где $\rho = (nF_0)^2$.

В более общем случае, при $c \neq 0$ ($m_0 \neq 0$), согласно равенствам (16)−(19) в силу соотношения $\tau = F_0^2 t$ получаем зависимости вида $X = X(t)$, откуда и определяются выражения вида $\theta = \theta(t)$. При этом, например, для соотношения (16) имеем

$$r_{12}\tau = 0.5(-\mu a \mp \Delta)t, \quad \Delta = F_0^2\sqrt{\delta_0}.$$

Итак, показано, что описание некоторых режимов движения маятника (8) при определённых условиях возможно представить в параметрической форме, выражая закон его движения в функции переменной τ.

4. Интерпретация маятникового движения

Для движения маятника, подчиняющегося уравнению (1), в не диссипативном режиме и при $\lambda = 0$ имеет место *волновая интерпретация.* Рассмотрим данное движение в окрестности положения устойчивого равновесия маятника $\theta = 0$. Разлагая в уравнении (1) в ряды Тэйлора функции $\sin\theta$, $\cos\theta$ в этой окрестности и оставляя в них члены порядка малости не выше $\mathrm{O}(\theta^3)$, в результате получаем

$$\ddot{\theta} + \Omega_1^2\theta - B^2\theta^3 = 0. \tag{27}$$

В уравнении (27) обозначено: $\Omega_1 = \sqrt{1+b}$ (Ω_1 − частота автоколебаний, упомянутая выше (п. 1)); $B^2 = \dfrac{1}{6}(1+4b)$. Уравнение (27) при $b > -1/4$ ($B^2 > 0$) является *уравнением Дуффинга* для случая мягкой упругой силы [9]. Решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $\theta(\tau_0) = 0$,

$$\theta(\tau) = \pm W\,\mathrm{th}\left[\frac{\Omega_1}{\sqrt{2}}(\tau - \tau_0)\right] \quad (W = B^{-1}\Omega_1), \tag{28}$$

обладает асимптотическим свойством

$$\theta(\tau) \to W \ (\theta(\tau) \to -W) \text{ при } \tau \to +\infty \ (\tau \to -\infty).$$

Решение (28) со знаком "плюс" является *кинком*, а со знаком "минус" – *антикинком.* Эти не диссипативные не сингулярные объекты представляют собой *уединённые волны*, обладающие эффектом трансляционной инвариантности и плотностью конечной энергии, локализованной в полосе с характерной шириной Ω_1^{-1} [10].

Таким образом, уравнение движения маятника (27) имеет три вида элементарных решений: кинк, антикинк (28) и два симметричных статических решения вида

$$\theta(\tau) = \pm W\,. \tag{29}$$

Решения (29) и присоединённое к ним тривиальное решение $\theta(\tau) = 0$ соответствуют существующим положениям равновесия данной двухконтурной маятниковой системы.

Библиографический список

1. *Макеев Н.Н.* Маятниковое движение токопроводящего твёрдого тела в магнитном поле // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. Пермь: изд-во Перм. ун-та, 2017. Вып. 49. С. 51–62.

2. *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приёмы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990. 486 с.

3. *Артемьева М.С., Скубов Д.Ю.* Динамика проводящих тел маятникового типа в высокочастотном магнитном поле // Известия РАН. Механика твёрдого тела. 2001. № 4. С. 29−39.

4. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.

5. *Понтрягин Л.С.* О динамических системах, близких к гамильтоновым // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1934. Т. 4. Вып. 8. С. 883−885.

6. *Матросов В.М.* Об устойчивости движения // Прикладная математика и механика. 1962. Т. 26. Вып. 6. С. 992−1002.

7. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 302 с.

8. *Беркович Л.М.* Метод точной линеаризации нелинейных автономных дифференциальных уравнений второго порядка // Прикладная математика и механика. 1979. Т. 43. Вып. 4. С. 629–638.

9. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969. 379 с.

10. *Раджараман Р.* Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. М.: Мир, 1985. 414 с.