**ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ**
**Нелинейные динамические системы**

**Вып. 48** **Межвузовский сборник научных трудов** **2016**

УДК 62–50

Н.А. Стрелкова, А.В. Макеева

*Пермский государственный национальный исследовательский университет*

Россия, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15
8 (342) 2-396-409

# МИНИМИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ ВРЕМЕНИ И РАСХОДА ТОПЛИВА В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

*Рассматривается задача оптимального управления переориентацией сферически симметричного твердого тела в сопротивляющейся среде, при условии, что вектор управляющего внешнего момента ограничен по модулю. В качестве минимизируемого функционала используется функционал качества, который характеризует в заданной пропорции расход времени и топлива. Для решения задачи применяется принцип максимума Л.С. Понтрягина.*

**Ключевые слова:** оптимальное управление; переориентация; кватернионы; сопротивляющаяся среда.

## Постановка задачи

Уравнения управляемого углового движения твердого тела, обладающего сферической симметрией, имеют вид

$$\begin{cases} 2\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}, \\ I\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{u} - k\boldsymbol{\omega}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – кватернион, компонентами которого являются параметры Родрига–Гамильтона $\lambda_i$, $\circ$ – символ кватер-

© Стрелкова Н. А., Макеева А. В., 2016

нионного произведения, $I_1 = I_2 = I_3 = I$ – главные центральные моменты инерции тела, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ – вектор управляющего момента, $\omega_i$, $u_i$ – проекции соответственно $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{u}$ на главные центральные оси инерции, $k$ – коэффициент аэродинамического момента сопротивления вращению тела.

Начальное и конечное положения твердого тела заданы и являются состояниями покоя:

$$\boldsymbol{\lambda}(0) = \boldsymbol{\lambda}_0 = (\lambda_{00}, \lambda_{10}, \lambda_{20}, \lambda_{30}), \ \ \boldsymbol{\omega}(0) = 0\,, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\lambda}(T) = \boldsymbol{\lambda}_T = (\pm 1, 0, 0, 0), \ \ \boldsymbol{\omega}(T) = 0\,. \tag{3}$$

На величину управляющего момента наложено ограничение

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \le u_0^2\,. \tag{4}$$

Оценка эффективности управления угловым движением твердого тела осуществляется с помощью критерия

$$J = \int_0^T \left(1 + a\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\right) dt\,, \tag{5}$$

где $a > 0$ и время перехода $T$ не задано.

Требуется найти управляющие функции $u_i(t)$ ($i = 1,2,3$), которые при $0 \le t \le T$ удовлетворяют уравнениям и граничным условиям (1)–(3), ограничению (4) и доставляют минимум функционалу (5).

В данной постановке, при других критериях качества, задача рассматривалась при $k = 0$ в работах [1–3] и при $k \ne 0$ в работах [4, 5].

## Построение оптимального решения

Сделаем в (1)–(5) следующую замену переменных и констант:

$$t = \sqrt{\frac{I}{u_0}}\,t', \quad \boldsymbol{\omega} = \sqrt{\frac{u_0}{I}}\,\boldsymbol{\omega}', \quad \mathbf{u} = u_0\mathbf{u}', \quad k = \sqrt{Iu_0}\,k',$$

$$a = \frac{1}{u_0}a', \quad J = \sqrt{\frac{I}{u_0}}\,J'. \tag{6}$$

В дальнейшем все исследования будем проводить в штрихованных переменных, однако штрихи для удобства записи опустим. Соотношения (1), (4) после замены (6) примут вид

$$\begin{cases} 2\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{u} - k\boldsymbol{\omega}, \end{cases} \tag{7}$$

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \le 1, \tag{8}$$

а вид граничных условий (2), (3) и выражения (5) не изменится.

Решение задачи будем искать в классе плоских поворотов, при которых вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ сохраняет постоянное направление в пространстве:

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{x}(t)\boldsymbol{\zeta}. \tag{9}$$

Здесь $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ – постоянный единичный вектор, направленный по оси вращения, $x$ – величина угла поворота. Так же, как и в работе [5], нетрудно показать, что в этом случае исследуемая задача сводится к следующей задаче оптимального управления объектом, движение которого в сопротивляющейся среде описывается линейной системой второго порядка:

$$J = \int_0^T \left(1 + a\left|u^*\right|\right) dt \to \min, \tag{10}$$

$$\ddot{x} + k\dot{x} = u^*, \quad \left|u^*\right| \le 1, \tag{11}$$

$$x(0) = x_0 > 0, \ \ \dot{x}(0) = 0, \ x(T) = \dot{x}(T) = 0, \tag{12}$$

где $u^* = u_1\zeta_1 + u_2\zeta_2 + u_3\zeta_3$.

Для решения задачи (10)–(12) воспользуемся принципом максимума Л.С. Понтрягина [6]. Сделаем замену $x = x_1, \dot{x} = x_2$ и преобразуем уравнение (11) к виду

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -kx_2 + u^*. \end{cases} \tag{13}$$

Составим функцию Гамильтона–Понтрягина:

$$H = \psi_1 x_2 - \psi_2 k x_2 + \psi_2 u^* - 1 - a\left|u^*\right|. \tag{14}$$

Выпишем сопряженную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + k\psi_2 \end{cases} \tag{15}$$

и найдем ее решение

$$\begin{cases} \psi_1 = d_1, \\ \psi_2 = d_2 e^{kt} + d_1 \dfrac{1}{k}, \end{cases} \tag{16}$$

где $d_1, d_2$ – произвольные постоянные. Функция $H$ достигает максимального значения при управлении

$$u^* = \begin{cases} \operatorname{sign}\psi_2(t), \text{ если } \left|\psi_2(t)\right| > a, \\ 0, \text{ если } \left|\psi_2(t)\right| < a, \\ \left[-1, 0\right], \text{ если } \psi_2(t) = -a, \\ \left[0, 1\right], \text{ если } \psi_2(t) = a. \end{cases} \tag{17}$$

Так как время $T$ окончания процесса не задано, то максимальное значение функции Гамильтона–Понтрягина $H$ должно удовлетворять условию [7]:

$$H_{\max}\left(t\right) = H_{\max}\left(T\right) = 0. \tag{18}$$

Если $\left|\psi_2\right| = a$, то из соотношений (16), (17) следует $H = -1$, что противоречит условию (18).

Таким образом, учитывая, что функция $\psi_2(t) = d_2 e^{kt} + d_1 \dfrac{1}{k}$ не более одного раза меняет знак на отрезке $\left[0, T\right]$, получаем, что в качестве возможных оптимальных управлений можно рассматривать девять управляющих последовательностей $\{0\}$, $\{-1\}$, $\{+1\}$, $\{0,-1\}$, $\{0,+1\}$, $\{-1,0\}$, $\{+1,0\}$ $\{-1,0,+1\}$, $\{+1,0,-1\}$. Заданным граничным условиям (12) удовлетворяет лишь последовательность $\{-1,0,+1\}$.

Оптимальное управление имеет вид:

$$u^* = \begin{cases} -1, \ 0 \le t \le \tau_1, \\ 0, \ \tau_1 \le t \le \tau_2, \\ 1, \ \tau_2 \le t \le T. \end{cases} \tag{19}$$

Подставим (19) в систему (13) и, учитывая граничные условия (12), найдем фазовые координаты $x_1, x_2$ и моменты переключения оптимального управления $\tau_1, \tau_2$:

$$x_1 = \begin{cases} -\dfrac{t}{k} - \dfrac{1}{k^2} e^{-kt} + x_0 + \dfrac{1}{k^2}, \ 0 \le t \le \tau_1, \\ -\dfrac{\tau_1}{k} + x_0 - \dfrac{1 - e^{k\tau_1}}{k^2} e^{-kt}, \ \tau_1 \le t \le \tau_2, \\ \dfrac{t}{k} + \dfrac{1}{k^2} e^{kT - kt} - \dfrac{T}{k} - \dfrac{1}{k^2}, \ \tau_2 \le t \le T, \end{cases} \tag{20}$$

$$x_2 = \begin{cases} \dfrac{1}{k} e^{-kt} - \dfrac{1}{k}, \ 0 \le t \le \tau_1, \\ \dfrac{1 - e^{k\tau_1}}{k} e^{-kt}, \ \tau_1 \le t \le \tau_2, \\ -\dfrac{1}{k} e^{kT - kt} + \dfrac{1}{k}, \ \tau_2 \le t \le T, \end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{k} \ln \frac{1}{2} \left( e^{kT} + 1 - \sqrt{(e^{kT} + 1)^2 - 4e^{kT + k^2 x_0}} \right), \\ \tau_2 &= \frac{1}{k} \ln \frac{1}{2} \left( e^{kT} + 1 + \sqrt{(e^{kT} + 1)^2 - 4e^{kT + k^2 x_0}} \right). \end{aligned} \tag{22}$$

Для определения времени окончания процесса $T$ воспользуемся условием (18), вычислим $H_{\max}$ при $t = T, 0, \tau_1$. Исключая постоянные $d_1, d_2$, приходим к квадратному уравнению

$$(1 - A) y^2 + 2 \left( 1 + A - 2e^{k^2 x_0} \right) y + 1 - A = 0 , \tag{23}$$

где введены обозначения $e^{kT} = y$, $\left( \dfrac{a}{1 + a} \right)^2 = A$. Отбрасывая отрицательный корень, получаем

$$T = \frac{2}{k} \ln \left( \frac{\sqrt{1 - Ae^{-k^2 x_0}} + \sqrt{1 - e^{-k^2 x_0}}}{\sqrt{1 - A}} \right) + kx_0 . \tag{24}$$

Отметим, что при $a = 0$ время перехода $T$ совпадает с временем $T_{\min} = \dfrac{2}{k}\ln\left[1 + \sqrt{1 - e^{-k^2 x_0}}\right] + kx_0$ в задаче об оптимальном по быстродействию управлении объектом [5], движение которого описывается соотношениями (11)–(12); в этом случае $\tau_1 = \tau_2 = \dfrac{1}{2}(T + kx_0)$.

Учитывая выражения (10), (22) вычислим минимальное значение функционала

$$J_{\min} = T + a(T + \tau_1 - \tau_2) =$$

$$= \frac{a}{k}\ln\left(\frac{e^{kT} + 1 - \sqrt{(e^{kT} + 1)^2 - 4e^{kT + k^2 x_0}}}{e^{kT} + 1 + \sqrt{(e^{kT} + 1)^2 - 4e^{kT + k^2 x_0}}}\right) + (1 + a)T. \quad (25)$$

На рис. 1 изображены графики зависимостей от коэффициента сопротивления $k$ времени движений с $u^* = -1$, $u^* = 0$, $u^* = +1$ при фиксированных значениях $a = 0.5$, $x_0 = 2.532$;

а на рис. 2 изображены графики зависимостей от параметра $a$ времени движений с $u^* = -1$, $u^* = 0$, $u^* = +1$ при фиксированных значениях $k = 0.1$, $x_0 = 2.532$.

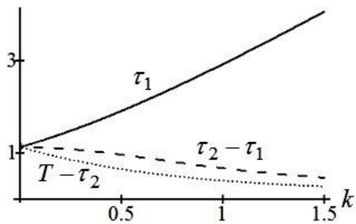


Рис. 1

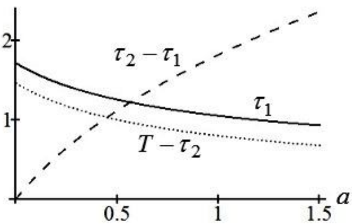


Рис. 2

На рис. 3 представлены графики зависимостей времени $T$ окончания процесса, значений функционалов $I = \int_0^T |u^*| dt$ и $J_{\min}$ от коэффициента сопротивления $k$ при фиксированных значениях $a = 0.5$, $x_0 = 2.532$.

На рис. 4 представлены графики зависимостей времени $T$ окончания процесса, значений функционалов $I$ и $J_{\min}$ от параметра $a$ при фиксированных значениях $k = 0.1$, $x_0 = 2.532$.

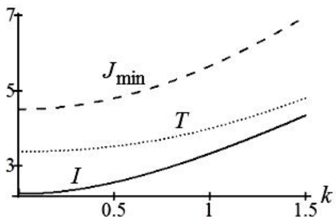


Рис. 3

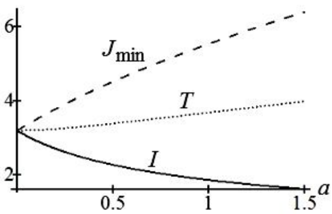


Рис. 4

На рис. 5 изображены фазовые траектории при различных значениях параметра $a$ $(a = 0.5;\ 1.5;\ 2.5)$ и фиксированных значениях $k = 0.1$, $x_0 = 2.532$.

Из графиков следует, что с увеличением параметра $a$ уменьшается максимальное значение $|\dot{x}|$, увеличивается промежуток $[x(\tau_1), x(\tau_2)]$ и, соответственно, уменьшаются промежутки $[x(0), x(\tau_1)]$ и $[x(\tau_2), x(T)]$.

На рис. 6 изображены фазовые траектории при различных значениях коэффициента сопротивления $k$ $(k = 0.1;\ 0.5;\ 1.0)$ и фиксированных значениях $a = 0.5$, $x_0 = 2.532$.

С увеличением параметра $k$ увеличивается промежуток $[x(0), x(\tau_1)]$ и, соответственно, уменьшаются промежутки $[x(\tau_1), x(\tau_2)]$ и $[x(\tau_2), x(T)]$.

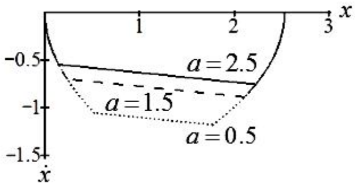


Рис. 5

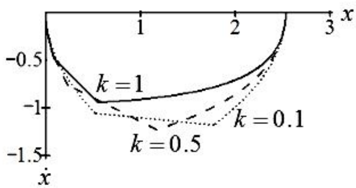


Рис. 6

Аналогичный вид имеют данные графики при других значениях констант $a$, $k$ и начальных значениях $x_0$.

Используя соотношения (9), (19), (21), найдем вектор угловой скорости

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{cases} \dfrac{e^{-kt}-1}{k}\boldsymbol{\zeta}, \ 0 \le t \le \tau_1, \\ \dfrac{1-e^{k\tau_1}}{k} e^{-kt}\boldsymbol{\zeta}, \ \tau_1 \le t \le \tau_2, \\ \dfrac{1-e^{k(T-t)}}{k}\boldsymbol{\zeta}, \ \ \tau_2 \le t \le T, \end{cases} \tag{26}$$

управляющий момент

$$\mathbf{u} = \begin{cases} -\boldsymbol{\zeta}, \ 0 \le t \le \tau_1, \\ 0, \ \tau_1 \le t \le \tau_2, \\ +\boldsymbol{\zeta}, \ \ \tau_2 \le t \le T \end{cases} \tag{27}$$

и решение кинематических уравнений системы (7)

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_0 \circ \exp\left\{\frac{1}{2}(x - x_0)\boldsymbol{\zeta}\right\}, \tag{28}$$

где функция $x = x(t) = x_1(t)$ определяется равенством (20).

Неизвестную постоянную $x_0$ и компоненты единичного вектора $\boldsymbol{\zeta}$ найдем из граничных условий (2), (3) и равенства (25), выбирая из двух значений функционала наименьшее. Тогда

$$x_0 = 2\arccos\left|\lambda_{00}\right|, \tag{29}$$

$$\zeta_i = \begin{cases} +\dfrac{\lambda_{i0}}{\sqrt{1-\lambda_{00}^2}}, \text{ если } \lambda_{00} \geq 0, \\ -\dfrac{\lambda_{i0}}{\sqrt{1-\lambda_{00}^2}} \text{ если } \lambda_{00} \leq 0, \quad i = \overline{1,3}. \end{cases} \tag{30}$$

Покажем, что полученные соотношения (26)–(30), определяющие плоский разворот твердого тела из начального положения (2) в конечное (3), удовлетворяют необходимым условиям принципа максимума Л.С. Понтрягина для исходной задачи оптимального управления.

Так же, как и в работе [1], введем в рассмотрение кватернионы $\boldsymbol{\psi}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ сопряженных переменных, в которых компоненты $\psi_i\,(i=0,1,2,3)$, соответствуют параметрам $\lambda_i$, а $\varphi_j\,(j=1,2,3)$ – переменным $\omega_j$, и введем обозначение $\mathbf{p} = \mathrm{vect}\left(\widetilde{\boldsymbol{\lambda}} \circ \boldsymbol{\psi}\right)$.

Тогда функция Гамильтона–Понтрягина и сопряженные уравнения для системы (7) примут вид

$$H = -\frac{1}{2}\psi_0(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \lambda_3\omega_3) + \frac{1}{2}\psi_1(\lambda_0\omega_1 + \lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2) +$$

$$+\frac{1}{2}\psi_2(\lambda_0\omega_2 + \lambda_3\omega_1 - \lambda_1\omega_3) + \frac{1}{2}\psi_3(\lambda_0\omega_3 + \lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1) +$$

$$+\varphi_1(u_1 - k\omega_1) + \varphi_2(u_2 - k\omega_2) + \varphi_3(u_3 - k\omega_3) - 1 - a\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2},$$

$$\begin{cases} 2\dot{\boldsymbol{\psi}} = \boldsymbol{\psi} \circ \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}} = k\boldsymbol{\varphi} - \dfrac{1}{2}\mathbf{p}. \end{cases}$$

Из условия максимума функции Гамильтона–Понтрягина следует, что

$$\mathbf{u} = \frac{\boldsymbol{\varphi}}{|\boldsymbol{\varphi}|},$$

если $|\boldsymbol{\varphi}| > 1$, и $\mathbf{u} = 0$, если данное неравенство нарушается. Кроме того, так как время $T$ окончания процесса не задано, то

$$H_{\max}(t) = H_{\max}(T) = 0 .$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что необходимым условиям принципа максимума Понтрягина удовлетворяют найденные по формулам (24), (26)–(28) функции $\mathbf{u}(t)$, $\boldsymbol{\omega}(t)$, $\boldsymbol{\lambda}(t)$, время $T$ окончания процесса и функции $\boldsymbol{\psi}(t)$, $\boldsymbol{\varphi}(t)$, $\mathbf{p}(t)$ следующего вида

$$\mathbf{p} = p_0\boldsymbol{\zeta}, \quad \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\lambda}_0 \circ p_0\boldsymbol{\zeta} \circ \exp\left\{\frac{1}{2}(x - x_0)\boldsymbol{\zeta}\right\},$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{p_0}{2k}\left(1 - \frac{2e^{kt}}{e^{k\tau_1} + e^{k\tau_2}}\right)\boldsymbol{\zeta},$$

где $p_0 = 2k\left(\dfrac{e^{k\tau_1} + e^{k\tau_2}}{e^{k\tau_1} - e^{k\tau_2}}\right)$, а $x_0$, $\boldsymbol{\zeta}$, $\tau_1$ и $\tau_2$ вычисляются соответственно по формулам (29), (30), (22).

## Пример

Рассмотрим оптимальную переориентацию твердого тела из начального состояния $\boldsymbol{\lambda}(0) = (0.3, 0.4, 0.5, 0.707)$, $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$ в конечное положение (3), минимизирующую функционал (5).

При $k = 0.5$ и $a = 1.5$ время разворота $T$ и моменты переключения управления соответственно равны

$$T = 3.999,\ \tau_1 = 1.646,\ \tau_2 = 3.619,$$

угол поворота твердого тела за время $T$ равен $x_0 = 2.532$ рад, минимальное значение функционала качества $J_{\min} = 7.037$.

На рис. 7–8 представлены графики зависимости компонент кватерниона $\boldsymbol{\lambda}$ и компонент вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ от времени.

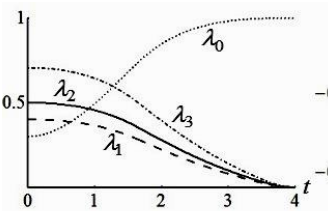


Рис. 7

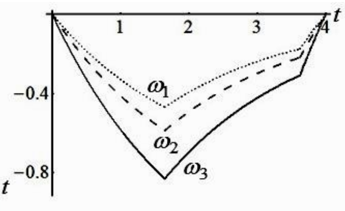


Рис. 8

## Заключение

Получено аналитическое решение рассматриваемой задачи оптимального управления пространственной переориентацией сферически симметричного твердого тела в сопротивляющейся среде: с использованием принципа максимума Л.С. Понтрягина найдены оптимальное управление, время окончания процесса, моменты переключения оптимального управления, фазовые координаты, минимальное значение функционала.

## Библиографический список

1. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.

2. *Молоденков А.В.* Кватернионное решение задачи оптимального разворота твердого тела со сферическим распределением масс // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 1995. Вып. 27. С. 122–131.

3. *Сиротин А.Н.* Об оптимальной по быстродействию пространственной переориентации в положение покоя вращающегося сферически-симметричного твердого тела // Известия РАН. МТТ. 1997. № 3. С. 18–27.

4. *Стрелкова Н.А.* Оптимальная по расходу топлива переориентация сферически симметричного твердого тела в сопротивляющейся среде // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2012. Вып. 44. С. 115–125.

5. *Стрелкова Н.А.* Оптимальная переориентация сферически симметричного твердого тела в сопротивляющейся среде // VI-е Поляховские чтения: Избр. тр. междунар. науч. конф. по механике, Санкт-Петербург, 31 января–3 февраля 2012 г. М.: Изд. И.В. Балабанов, 2012. С. 75–79.

6. *Понтрягин Л.С.*, *Болтянский В.Г.*, *Гамкрелидзе Р.В.*, *Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.

7. *Атанс М., Фалб П.* Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968. 764 с.