ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ
Нелинейные динамические системы

Вып. 48 **Межвузовский сборник научных трудов** **2016**

517.9:519.2:004.94

И.Е. Полосков

Пермский государственный национальный исследовательский университет

Россия, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15
polosk@psu.ru; (342) 2-396-560

РАСЧЕТ МАТРИЦЫ КОВАРИАЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассматривается одна из проблем из области вероятностного анализа поведения динамических систем с сосредоточенными параметрами, описываемых линейными стохастическими дифференциальными уравнениями с параметрическими возмущениями в форме независимых стандартных винеровских процессов. В рамках корреляционной теории векторных случайных процессов основными объектами исследования являются вектор функций математических ожиданий, матрица функций ковариации (дисперсии) и матрица ковариационных функций векторного случайного процесса, моделирующего изменение вектора состояния изучаемой системы. Основное внимание в данной работе уделено представлению новой схемы расчета матрицы ковариационных функций. Эта схема описывается на примере анализа системы с одной степенью свободы.

Ключевые слова: моделирование, стохастическое дифференциальное уравнение, стохастический анализ, ковариационная функция, уравнение для моментной функции.

© Полосков И.Е., 2016

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-96019) и Минобрнауки РФ (Задание № 2014/153).

Введение

Задачи вероятностного исследования процессов в нелинейных динамических системах относятся к числу важнейших как в теоретическом, так и в практическом плане. Необходимость их решения возникает при изучении различных явлений: расчете полета летательных аппаратов (ЛА) и колебаний конструкций этих ЛА под действием атмосферной турбулентности и из-за акустического возбуждения от реактивных двигателей; анализе вибраций, возникающих при движении автомобилей по неровным дорогам, перемещении катящихся по рулежным дорожкам самолетов и поездов по железнодорожным путям; оценке перемещений высотных сооружений (зданий, мачт, промышленных дымовых труб, подвесных и вантовых мостов) при ветровых и сейсмических воздействиях, а также под влиянием ударных волн из-за взрывов; исследовании качки судов и сооружений вдали от берега при нерегулярном морском волнении; реакции мостов на перемещающиеся нагрузки от движения транспортных средств; изучении отклонений элементов орбит спутников от расчетных, возникающих из-за неточности изготовления ракет-носителей и ошибок в работе систем управления [1–14] и т.д.

Заметим, что как правило, к классу стохастических (или вероятностных, или случайных, или статистических) относят системы со случайными параметрами (в широком смысле). Указанные системы позволяют описать функционирование реальных линейных и нелинейных систем, в которых параметры являются случайными величинами, процессами и полями. Основным математическим аппаратом исследования таких систем, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями, обыкновенными и в частных производных, и их модификациями (СОДУ, СДУвЧП), является теория случайных марковских процессов и полей. Используя эту теорию, достижения в развитии аппарата анализа СДУ, (обобщенного) уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК-уравнения) для (функционала) плотности вероятности распределения вектора состояния и Пугачева для характеристической функции (характеристического функционала) [2, 15–17] в сочетании с точными и приближенными схемами исследований в ряде случаев удается получить интересные и важные для приложений результаты.

Необходимо отметить, что в последнее время, наряду со случайными (вероятностными или стохастическими [14], байесовскими [18, 19], субъективными [20]) при анализе явлений в моделях учитывают и нестохастические неопределенности, которые нередко проявляются в инженерных задачах. Для математического описания и количественной оценки таких неопределенностей в исследуемых объектах и явлениях применяются методы выпуклого моделирования [21], грубых множеств [22], нечетких множеств [23], нечетких случайных величин [24] и теории хаоса [25, 26].

Обычно целью исследования стохастических систем с сосредоточенными параметрами является получение различных вероятностных характеристик векторов состояния как векторных случайных процессов. Наиболее полным будет решение, приводящее к определению одноточечной или многоточечной (переходной) плотности вероятности, а также характеристической функции изучаемого процесса, которые в зависимости от постановки задачи могут быть получены с разной степенью детализации. Но как правило, на практике ограничиваются числовыми характеристиками вектора состояния, включающими вектор функций математических ожиданий, матрицу функций ковариации (дисперсии) и матрицу ковариационных функций, которые являются основными инструментами корреляционной теории векторных случайных процессов, причем компоненты последней матрицы, наряду с матрицей спектральных плотностей, дают важнейшую информацию для построения оптимальных и устойчивых систем управления.

Наряду с остальными задачами, основное внимание в данной работе уделено представлению новой схемы расчета матрицы ковариационных функций. Эта схема описывается на примере анализа линейной параметрической системы с одной степенью свободы и допускает распространение на системы с любым конечным числом таких степеней. Приводятся выполненные в среде пакета *Mathematica* [27] результаты расчетов, демонстрирующие пригодность представленной схемы.

1. Постановка задачи

При исследовании многих стохастических динамических систем с сосредоточенными параметрами предполагается, что векторный случайный процесс $\boldsymbol{X}(t)$, описывающий состояние исследуемого объекта, удовлетворяет системе СОДУ Стратоновича следующего вида:

$$d\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{f}\big(\,\boldsymbol{X}(t), t\,\big)\,dt + \boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\,\boldsymbol{X}(t), t\,\big) \circ d\boldsymbol{W}(t), \quad \boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0, \quad (1)$$

или в менее строгой форме

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{f}\big(\,\boldsymbol{X}(t), t\,\big) + \mathcal{G}\big(\,\boldsymbol{X}(t), t\,\big)\,\boldsymbol{V}(t), \qquad X(t_0) = \boldsymbol{X}^0, \qquad (2)$$

где t – время ($t_0 < t \leqslant T < +\infty$); $\boldsymbol{X}(t) = \mathrm{col}\,\big(\,X_1(t), X_2(t), ..., X_n(t)\,\big)$; $\boldsymbol{W}(t) = \mathrm{col}\,\big(\,W_1(t), W_2(t),\ ...,\ W_m(t)\,\big)$ – стандартный векторный винеровский процесс с независимыми компонентами:

$$\mathcal{E}[\boldsymbol{W}(t)] = 0, \qquad \mathcal{E}[d\boldsymbol{W}(t)\,d\boldsymbol{W}^{\mathsf{T}}(t')] = \boldsymbol{\mathcal{I}}\,dt\,\delta(t - t');$$

$\boldsymbol{V}(t) = \mathrm{col}\big(\,V_1(t), V_2(t), ..., V_m(t)\,\big)$ – вектор независимых стандартных гауссовских белых шумов – формальная производная векторного винеровского процесса $\boldsymbol{W}(t)$:

$$\mathcal{E}[\boldsymbol{V}(t)] = 0, \qquad \mathcal{E}[\boldsymbol{V}(t)\,\boldsymbol{V}^{\mathsf{T}}(t')] = \boldsymbol{\mathcal{I}}\,\delta(t - t');$$

$\boldsymbol{f}(\cdot,\cdot) = \{f_i(\cdot,\cdot)\}^{\mathsf{T}} : \mathbb{R}^n \times [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ и $\boldsymbol{\mathcal{G}}(\cdot,\cdot) = \{g_{ij}(\cdot,\cdot)\} : \mathbb{R}^n \times [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ – неслучайные вектор и матрица с дифференцируемыми необходимое число раз компонентами; $\boldsymbol{X}^0 \sim p^{\,0}(\boldsymbol{x})$ – случайный вектор, описывающий начальное положение вектора состояния и имеющий плотность вероятности $p^{\,0}(\boldsymbol{x})$; T – символ транспонирования; $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ – единичная матрица соответствующего порядка; $\mathcal{E}[...]$ – оператор математического ожидания; $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака; точкой или точками сверху символа обозначаются производные по переменной t соответствующего порядка; $\mathrm{col}\,\big(\,d_1, d_2, \ldots, d_s\,\big)$ – вектор-столбец с соответствующими компонентами; $\mathbb{R}^s$ – стандартное евклидово пространство размерности s, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. При этом $\boldsymbol{X}(t)$ – решение уравнений (1), (2) – будет непрерывным векторным (диффузионным) марковским процессом. Условия существования и единственности этого решения приведены в [28].

Как известно [1, 2, 13, 15], для полного описания стохастического поведения вектора состояния $\boldsymbol{X}(t)$ необходимо знание одноточечной (по отношению к временно́му аргументу) плотности вероятности $p(\boldsymbol{x}, t)$ и переходной плотности вероятности $\pi(\boldsymbol{x}, t\,|\,\boldsymbol{y}, \tau)$ $t > \tau$, которые удовлетворяют ФПК-уравнению (второму или прямому уравнению Колмогорова)

$$\frac{\partial p(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \mathbb{L}_{xt} [\![\, p(\boldsymbol{x},t) \,]\!], \tag{3}$$

$$\frac{\partial \pi(\boldsymbol{x},t|\boldsymbol{y},\tau)}{\partial t} = \mathbb{L}_{xt} [\![\, \pi(\boldsymbol{x},t|\boldsymbol{y},\tau) \,]\!], \tag{4}$$

$$\mathbb{L}_{xt} [\![\, \cdot \,]\!] = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \big[\, b_{ij}(\boldsymbol{x},t)\, \{\cdot\} \,\big]}{\partial x_i\, \partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \big[\, a_i(\boldsymbol{x},t)\, \{\cdot\} \,\big]}{\partial x_i} \tag{5}$$

с начальным условием

$$p(\boldsymbol{x},t_0) = p^{\,0}(\boldsymbol{x}), \tag{6}$$

$$\lim_{t \to \tau+0} \pi(\boldsymbol{x},t \,|\, \boldsymbol{y},\tau) = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{7}$$

соответственно, где коэффициенты сноса a_i и диффузии b_{ij} вычисляются по формулам Стратоновича [2, 15] вида:

$$a_i = f_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}\, g_{jk}, \qquad b_{ij} = \sum_{k=1}^{m} g_{ik}\, g_{jk}. \tag{8}$$

Знание $p(\boldsymbol{x},t)$ позволяет вычислить компоненты вектора $\boldsymbol{m}_X(t) = \mathrm{col}\,\big(\, m_{X_1}(t), m_{X_2}(t), ..., m_{X_n}(t) \,\big)$ функций математических ожиданий и матрицы $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}(t) = \{\mathcal{K}_{X_iX_j}(t)\}$ функций ковариации:

$$m_{X_i}(t) = m_i(t) = \int_{\mathbb{R}^n} x_i\, p(\boldsymbol{x},t)\, d\boldsymbol{x}, \tag{9}$$

$$\mathcal{K}_{X_iX_j}(t) = \mathcal{K}_{ij}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \big[\, x_i - m_{X_i}(t) \,\big] \big[\, x_j - m_{X_j}(t) \,\big] p(\boldsymbol{x},t)\, d\boldsymbol{x} = \\ = m_{ij}(t) - m_i(t)\, m_j(t), \tag{10}$$

где $i,j = 1,\, 2,\, ...,\, n$; $\mathcal{D}_{X_i}(t) = \mathcal{K}_{X_iX_i}(t) = \mathcal{D}_i(t)$ – функции дисперсии; $m_{ij}(t)$ – начальная моментная функция второго порядка. Ситуация же с вычислением элементов матрицы $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t,\tau) = \{\mathcal{C}_{X_iX_j}(t,\tau)\}$ ковариационных функций сложнее: во-первых, для их расчета нужна двухточечная плотность вероятности $p(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{y},\tau)$:

$$\mathcal{C}_{X_iX_j}(t,\tau) = \mathcal{C}_{ij}(t,\tau) = \\ = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \big[\, x_i - m_{Xi}(t) \,\big] \, \big[\, y_j - m_{Xj}(\tau) \,\big]\, p(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{y},\tau)\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{y} = \\ = \mathcal{R}_{ij}(t,\tau) - m_i(t)\, m_j(\tau), \tag{11}$$

где $\mathcal{R}_{ij}(t,\tau)$ – компоненты матрицы корреляционных функций; во-вторых, несмотря на соотношение

$$p(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{y},\tau) = \pi(\boldsymbol{x},t\,|\,\boldsymbol{y},\tau)\cdot p(\boldsymbol{y},t), \tag{12}$$

использование уравнения (3) с начальным условием (6) для вычисления $\pi(\boldsymbol{x},t\,|\,\boldsymbol{y},\tau)$ или с условием

$$p(\boldsymbol{x},\tau;\boldsymbol{y},\tau) = p^{\,0}(\boldsymbol{y})\cdot\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{13}$$

для определения $p(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{y},\tau)$ затруднительно с технической точки зрения вследствие того, что прямой приближенный численный расчет $\pi(\boldsymbol{x},t\,|\,\boldsymbol{y},\tau)$ или $p(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{y},\tau)$ невозможен из-за наличия символьных векторного и скалярного параметров ($\boldsymbol{y}$ и τ соответственно).

Другой путь, нежели использование соотношений (9)–(11), состоит в точном или приближенном построении на основе ФПК-уравнения (3) систем ОДУ, которым удовлетворяют компоненты вектора $\boldsymbol{m}_X(t)$ и матрицы $\boldsymbol{\mathcal{D}}_X(t)$, да и другие одноточечные моментные (и кумулянтные) функции (более высокого порядка) [15]. При этом замкнутые системы ОДУ для моментных функций могут быть построены только для векторов состояния или линейных

$$d\boldsymbol{X}(t) = \big[\,\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{c}(t)\,\big]\,dt + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)\,d\boldsymbol{W}(t), \tag{14}$$

или линейных параметрических

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{X}(t) = \big[\,\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{c}(t)\,\big]\,dt &+ \\ &+ \big[\,\boldsymbol{\mathbb{G}}(t) :: \boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)\,\big]\circ d\boldsymbol{W}(t), \end{aligned} \tag{15}$$

систем СОДУ, где $\boldsymbol{c}(t)=\mathrm{col}\,\big(\,c_1(t),c_2(t),\ldots,c_n(t)\,\big)$, $\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)=\{a_{ij}(t)\,\}\in\mathbb{M}_{n\times n}$, $\boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)=\{q_{ij}(t)\,\}\in\mathbb{M}_{n\times m}$, $\boldsymbol{\mathbb{G}}(t)=\{g_{ijk}(t)\,\}\in\mathbb{M}_{n\times m\times n}$ – неслучайные векторные и матричные функции, компоненты которых дифференцируемы необходимое число раз по аргументу t; $\mathbb{M}_{s\times q}$ и $\mathbb{M}_{s\times q\times r}$ – множество действительных $s\times q$-матриц и $s\times q\times r$-матриц соответственно;

$$\boldsymbol{\mathbb{G}}(t) :: \boldsymbol{X}(t) = \Big\{\,\sum_{k=1}^{n} g_{ijk}(t)\,X_k(t)\,\Big\}.$$

В случае же нелинейных систем ситуация резко усложняется. В первую очередь это связано с незамкнутостью любой конечной части построенной, что объясняется наличием в уравнениях моментных функций более высокого порядка, чем порядок моментной функции, относительно которой записано конкретное уравнение (например, в случае полиномиальных нелинейностей). Более серьезные проблемы доставляют существенно нелинейные (трансцендентные, кусочно гладкие) СОДУ, для которых построение моментных и кумулянтных уравнений невозможно без приближенной замены исходных СОДУ уравнениями более простой структуры. Это касается как использования ФПК-уравнений и уравнений Пугачева [15, 16, 29, 30], так и прямого построения одноточечных моментных и кумулянтных уравнений на основе системы ОДУ для вектора состояния [31–33] (тензорное представление для одноточечных моментов и кумулянтов), [35, 36] (использование функции Грина для линейной системы со случайными параметрами). Отметим также схемы прямого построения многоточечных моментных и кумулянтных уравнений на основе системы СОДУ для вектора состояния, представленные в работах [34, 36, 37], но все эти схемы имеют весьма сложную структуру. Что касается ОДУ для элементов матрицы $\boldsymbol{\mathcal{C}}_X(t,\tau)$ ковариационных функций, то такие ОДУ без труда могут быть построены только для векторов состояния линейных систем СОДУ [15].

Итак, задача состоит в разработке удобной и эффективной схема расчета матриц ковариационных функций для векторов состояния динамических систем с сосредоточенными параметрами, описываемых линейными стохастическими дифференциальными уравнениями с параметрическими возмущениями в форме независимых стандартных винеровских процессов.

2. Описание предлагаемой схемы

Рассмотрим стохастическую систему следующего вида:

$$\ddot{X}(t) + 2\,\alpha\,\dot{X}(t) + \omega_0^2\,X(t) = \beta\,X(t)\,V(t), \tag{16}$$

где $\alpha > 0$, $\omega > 0$, β – постоянные. Обозначая $X(t)$ через $X_1(t)$, $\dot{X}(t)$ – через $X_2(t)$ и переходя к уравнениям в дифференциалах, получим частный случай системы (14):

$$\begin{gathered} dX_1(t) = dX_2(t), \\ dX_2(t) = -\big[\,\omega_0^2\,X_1(t) + 2\,\alpha\,X_2(t)\,\big]\,dt + \beta\,X_1(t)\circ dW(t). \end{gathered} \tag{17}$$

Пусть начальное состояние системы $\boldsymbol{X}^0 = \{X_1(0), X_2(0)\}^\intercal$ случайно и описывается плотностью вероятности $p^{\,0}(\cdot,\cdot)$ и существуют первые моменты – начальные математические ожидания m_i^0 и начальные моменты второго порядка m_{ij}^0 вектора $\boldsymbol{X}^0$.

Тогда коэффициенты сноса и диффузии для системы (17) принимают следующую форму:

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2, & b_{11} &= b_{12} = b_{21} = 0, \\ a_2 &= -\big(\,\omega_0^2\, x_1 + 2\,\alpha\, x_2\,\big), & b_{22} &= \beta^2\, x_1^2, \end{aligned} \tag{18}$$

а ФПК-уравнение (3), (5) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(x_1,x_2,t)}{\partial t} = \frac{\beta^2}{2}\,\frac{\partial^2 p(x_1,x_2,t)}{\partial x_2^2} - x_2\,\frac{\partial p(x_1,x_2,t)}{\partial x_1} + \\ + \frac{\partial\big[\,\big(\,\omega_0^2\, x_1 + 2\,\alpha\, x_2\,\big)\, p(x_1,x_2,t)\,\big]}{\partial x_2}. \end{aligned} \tag{19}$$

Исходя из последнего уравнения и применяя соотношения [15, стр. 100]

$$\begin{aligned} \dot m_k(t) &= \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} a_k(\boldsymbol{x},t)\, p(\boldsymbol{x},t)\, d\boldsymbol{x}, \\ \dot m_{k\ell}(t) &= \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \big[\, x_k\, a_\ell(\boldsymbol{x},t) + x_\ell\, a_k(\boldsymbol{x},t) + b_{k\ell}(\boldsymbol{x},t)\,\big] p(\boldsymbol{x},t)\, d\boldsymbol{x}, \end{aligned} \tag{20}$$

где $k,\,\ell = 1,\,2$, можно получить уравнения для одноточечных первых моментов векторного случайного процесса $\boldsymbol{X}(t)$ – функций математического ожидания и компонент матрицы функций ковариации:

$$\begin{aligned} \dot m_1(t) &= m_2(t), \\ \dot m_2(t) &= -\big[\,\omega_0^2\, m_1(t) + 2\,\alpha\, m_2(t)\,\big], \\ \dot m_{11}(t) &= 2\, m_{12}(t), \\ \dot m_{12}(t) &= m_{22}(t) - \big[\,\omega_0^2\, m_{11}(t) + 2\,\alpha\, m_{12}(t)\,\big], \\ \dot m_{22}(t) &= \beta^2\, m_{22}(t) - 2\,\big[\,\omega_0^2\, m_{12}(t) + 2\,\alpha\, m_{22}(t)\,\big] \end{aligned} \tag{21}$$

с начальными условиями

$$
\begin{gathered}
m_1(0) = m_1^0, \quad m_2(0) = m_2^0, \\
m_{11}(0) = m_{11}^0, \quad m_{12}(0) = m_{12}^0, \quad m_{22}(0) = m_{22}^0.
\end{gathered} \tag{22}
$$

Теперь введем случайный вырожденный векторный случайный процесс $\boldsymbol{Y}(t) = \{Y_1(t), Y_2(t)\}^\intercal$, который определим уравнениями:

$$
\dot{\boldsymbol{Y}}(t_2) = 0, \quad t_2 > t_1, \quad \boldsymbol{Y}(t_1) = \boldsymbol{X}(t_1). \tag{23}
$$

Далее, пусть расширенный векторный случайный процесс col $\big(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{Y}(t)\big)$ имеет двухточечную плотность вероятности $p^*(\boldsymbol{x}, t_2; \boldsymbol{y}, t_1)$, которая удовлетворяет соответствующему ФПК-уравнению:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial p^*(\boldsymbol{x}, t_2; \boldsymbol{y}, t_1)}{\partial t} = \frac{\beta^2}{2}\, \frac{\partial^2 p^*(\boldsymbol{x}, t_2; \boldsymbol{y}, t_1)}{\partial x_2^2} - x_2\, \frac{\partial p^*(\boldsymbol{x}, t_2; \boldsymbol{y}, t_1)}{\partial x_1} + \\
+ \frac{\partial \big[\, \big(\, \omega_0^2\, x_1 + 2\, \alpha\, x_2 \,\big)\, p^*(\boldsymbol{x}, t_2; \boldsymbol{y}, t_1) \,\big]}{\partial x_2}
\end{aligned} \tag{24}
$$

с начальным условием

$$
\lim_{t_2 \to t_1 + 0} p^*(\boldsymbol{x}, t_2; \boldsymbol{y}, t_1) = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\, p(\boldsymbol{y}, t_1). \tag{25}
$$

Используя (24), по аналогии с формулами (20) можно построить уравнения для моментных функций $m_{X_k Y_\ell}(t_2, t_1) = m_{k\ell}^*(t_2, t_1)$, k, ℓ $= 1, 2$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial m_{11}^*(t_2, t_1)}{\partial t_2} &= m_{21}^*(t_2, t_1), \\
\frac{\partial m_{21}^*(t_2, t_1)}{\partial t_2} &= -\big[\, \omega_0^2\, m_{11}^*(t_2, t_1) + 2\, \alpha\, m_{21}^*(t_2, t_1) \,\big], \\
\frac{\partial m_{12}^*(t_2, t_1)}{\partial t_2} &= m_{22}^*(t_2, t_1), \\
\frac{\partial m_{22}^*(t_2, t_1)}{\partial t_2} &= -\big[\, \omega_0^2\, m_{12}^*(t_2, t_1) + 2\, \alpha\, m_{22}^*(t_2, t_1) \,\big].
\end{aligned} \tag{26}
$$

Чтобы определить начальные условия для неизвестных функций в уравнениях (26), проделаем следующие выкладки:

$$m^*_{k\ell}(t_1,t_1) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} x_k\, y_\ell\; p^*(\boldsymbol{x},t_1;\boldsymbol{y},t_1)\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{y} =$$

$$= \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} x_k\, y_\ell\; \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,p(\boldsymbol{y},t_1)\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{y} = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} y_k\, y_\ell\; p(\boldsymbol{y},t_1)\,d\boldsymbol{y},$$

откуда

$$m^*_{k\ell}(t_1,t_1) = m_{Y_k Y_\ell}(t_1) = m_{k\ell}(t_1), \qquad k,\ell = 1,2. \tag{27}$$

Завершим расчетную схему. Для этого установим связь матрицы ковариационных функций для $t_2 > t_1$ с вычисляемыми из уравнений функциями:

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t_2,t_1) = \mathcal{E}\Big[\,\big\{\,\boldsymbol{X}(t_2) - \boldsymbol{m}_X(t_2)\,\big\}\big\{\,\boldsymbol{X}(t_1) - \boldsymbol{m}_X(t_1)\,\big\}^{\mathsf{T}}\,\Big] =$$

$$= \mathcal{E}\Big[\,\big\{\,\boldsymbol{X}(t_2) - \boldsymbol{m}_X(t_2)\,\big\}\big\{\,\boldsymbol{Y}(t_1) - \boldsymbol{m}_X(t_1)\,\big\}^{\mathsf{T}}\,\Big] =$$

$$= \mathcal{E}\big[\,\boldsymbol{X}(t_2)\,\boldsymbol{Y}^{\mathsf{T}}(t_1)\,\big] - \boldsymbol{m}_X(t_2)\,\boldsymbol{m}_X^{\mathsf{T}}(t_1),$$

или окончательно

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t_2,t_1) = \begin{bmatrix} m^*_{11}(t_2,t_1) & m^*_{12}(t_2,t_1) \\ m^*_{21}(t_2,t_1) & m^*_{22}(t_2,t_1) \end{bmatrix} - \boldsymbol{m}_X(t_2)\,\boldsymbol{m}_X^{\mathsf{T}}(t_1). \tag{28}$$

3. Пример

Чтобы продемонстрировать разработанную схему, были проведены численные расчеты в среде пакета *Mathematica*. Значения параметров задачи варьировались следующим образом:

$$\alpha \in \{0.1, 0.2\}, \quad \omega_0 \in \{2.0, 4.0\}, \quad \beta \in \{0.1, 0.15\},$$

а начальные математические ожидания и ковариации были выбраны так:

$$\boldsymbol{m}^0 = \begin{bmatrix} 4.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{K}}^0 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.00 \\ 0.00 & 0.16 \end{bmatrix}.$$

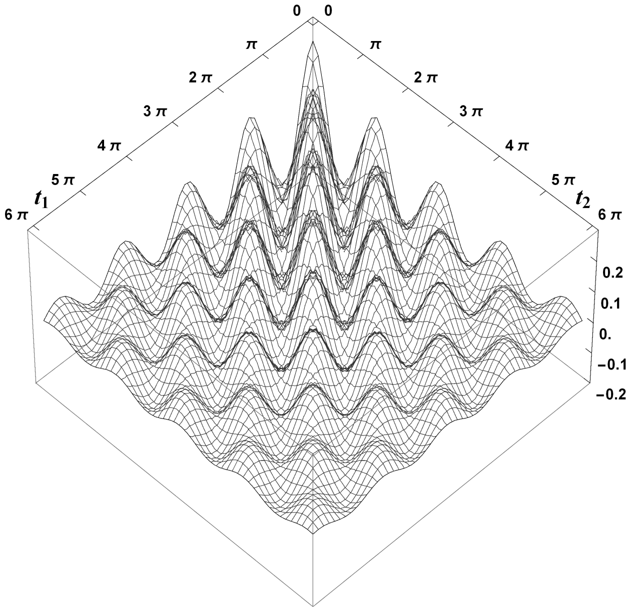

Рис.1

Результаты вычисления ковариационных функций $\mathcal{C}_{11}(t_1,t_2)$, $\mathcal{C}_{12}(t_1,t_2)$, $\mathcal{C}_{21}(t_1,t_2)$, $\mathcal{C}_{22}(t_1,t_2)$ представлены на рис. 1–4, которые соответствует $\alpha = 0.1$, $\omega_0 = 2.0$, $\beta = 0.1$, $T = 6\,\pi$.

Заключение

Резюмируя, заметим, что изложенная схема заключена в подлежащих численному интегрированию системах ОДУ (21), (26) с начальными условиями (22), (27) соответственно и соотношении (28). Перенос изложенной схемы на нелинейные стохастические системы возможен при использовании какой-либо схемы замыкания [15] бесконечной системы ОДУ для начальных моментных функций, причем бесконечность системы является следствием ее нелинейности.

Библиографический список

1. *Болотин В.В.* Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 336 с.

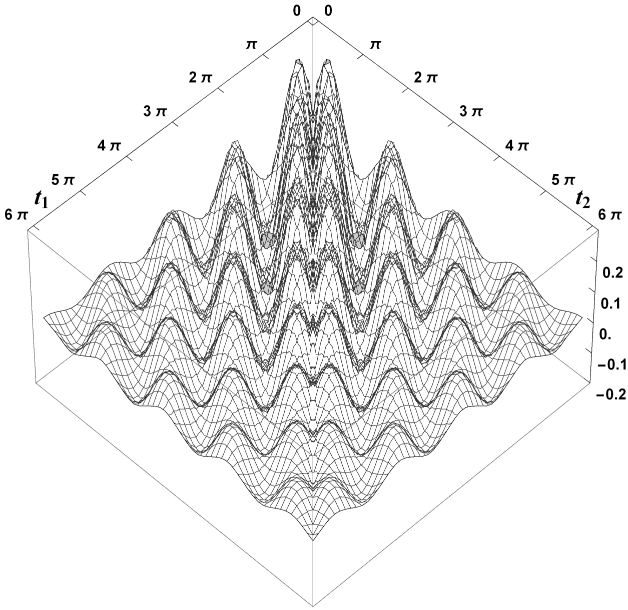

Рис.2

2. *Диментберг М.Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980. 368 с.

3. *Евланов Л.Г., Константинов В.М.* Системы со случайными параметрами. М.: Наука, 1976. 568 с.

4. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения и волны в случайно неоднородных средах. М.: Наука, 1980. 336 с.

5. *Макаров Б.П.* Нелинейные задачи статистической динамики машин и приборов. М.: Машиностроение, 1983. 264 с.

6. *Николаенко Н.А., Ульянов С.В.* Статистическая динамика машиностроительных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 368 с.

7. *Светлицкий В.А.* Случайные колебания механических систем. М.: Машиностроение, 1991. 320 с.

8. *Crandall S.H., Mark W.D.* Random vibration in mechanical systems. New York: Academic Press, 1963. VIII, 166 p.

9. *Ibrahim R.A.* Parametric random vibration. Letchworth: Research Studies Press, 1985. XII, 342 p.

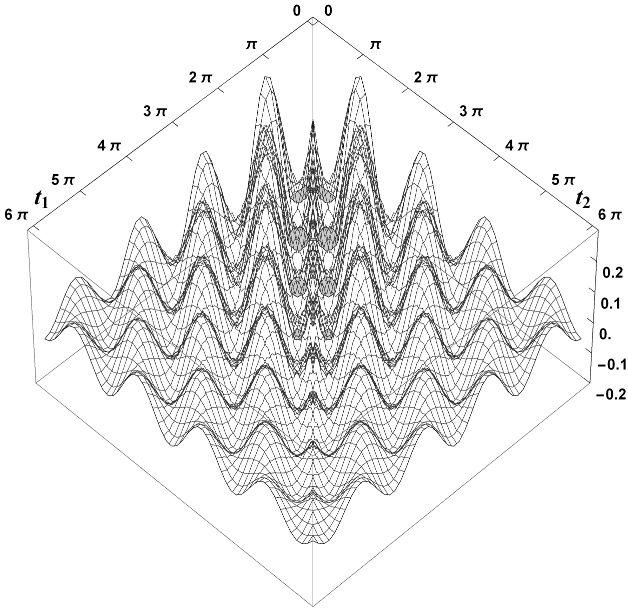

Рис.3

10. *Iwankiewicz R.* Dynamical mechanical systems under random impulses. Singapore: World Scientific, 1995. IX, 161 p.

11. *Lin Y.K.* Probabilistic theory of structural dynamics. New York: McGraw–Hill, 1967. 368 p.

12. *Ohayon R., Soize C.* Structural acoustics and vibration mechanical models: Variational formulations and discretization. London: Academic Press, 1998. X, 424 p.

13. *Socha L.* Linearization methods for stochastic dynamic systems. Berlin: Springer, 2008. XI, 383 p.

14. *Soize C.* Stochastic models of uncertainties in computational mechanics. Reston: ASCE, 2012. 120 p.

15. *Маланин В.В., Полосков И.Е.* Методы и практика анализа случайных процессов в динамических системах: учеб. пособие. Ижевск: РХД, 2005. 296 с.

16. *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Теория стохастических систем: учеб. пособие для вузов. М.: Логос, 2004. 1000 с.

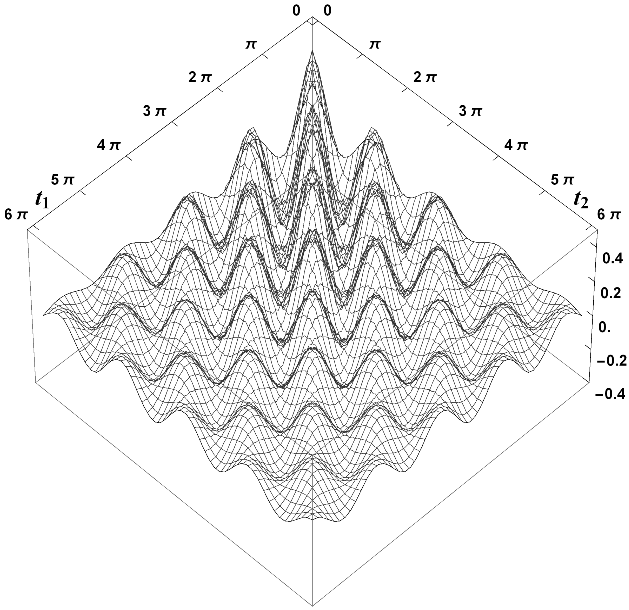

Рис.4

17. *Шмелев А.Б.* Основы марковской теории нелинейной обработки случайных полей. М.: Изд-во МФТИ, 1998. 208 с.

18. *Ando T.* Bayesian model selection and statistical modeling. Boca Raton: CRC, 2010. XIV, 286 p.

19. *Congdon P.* Applied bayesian modelling. Chichester: Wiley, 2014. XLI, 437 p.

20. *Jeffrey R.* Subjective probability: The real thing. Cambridge (NY): Cambridge University Press, 2004. – 142 p.

21. *Ben-Haim Y., Elishakoff I.* Convex models of uncertainty in applied mechanics. Amsterdam: Elsevier, 1990. 240 p.

22. *Pawlak Z.* Rough sets: theoretical aspects of reasoning about data. Dordrecht: Springer, 1991. 231 p.

23. *Конышева Л.К., Назаров Д.М.* Основы теории нечетких множеств: учеб. пособие. СПб.: Питер, 2011. 192 с.

24. *Möller B., Beer M.* Fuzzy randomness: Uncertainty in civil engineering and computational mechanics. Berlin: Springer, 2004. 335 p.

25. *Магницкий Н.А.* Теория динамического хаоса. М.: Ленанд, 2011. 320 с.

26. *Kapitaniak T.* Chaos for engineers: Theory, applications, and Control. Berlin: Springer, 2000. XII, 135 p.

27. *Mangano S.* Mathematica cookbook. Cambridge: O'Reilly, 2010. XXIV, 800 p.

28. *Оксендаль Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.: Мир, 2003. 408 с.

29. *Дашевский М.Л.* Уравнения семиинвариантов нелинейных динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1968. № 10. С. 63–71.

30. *Дашевский М.Л.* A semiinvariant method of closing the equations for moments in statistical analysis of nonlinear systems // Проблемы управления и теория информации. 1975. Т. 4, № 4. С. 317–326.

31. *Lutes L.D.* State space analysis of stochastic response cumulants // Probabilistic Engineering Mech. 1986. Vol. 1, № 2. P. 94–98.

32. *Lutes L.D., Papadimitriou C.* Direct derivation of response moment and cumulant equations for non-linear stochastic problems // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2000. Vol. 35, № 5. P. 817–835.

33. *Lutes L.D., Papadimitriou C.* Finding response cumulants for nonlinear systems with multiplicative excitations // IUTAM Symposium on Nonlinearity and Stochastic Structural Dynamics / S. Narayanan, R.N. Iyengar (eds.). Dordrecht: Springer, 2001. P. 119-132.

34. *Lutes L.D.* A Perspective on state-space stochastic analysis // 8th ASCE Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability. 2000. PMC2000-LDL. 15 p. URL: http://www.usc.edu/dept/civil_eng/johnsone/pmc2000/sessions/pap ers/pLDL.pdf

35. *Brissaud A., Frisch U.* Solving linear stochastic differential equations // Journal of Mathematical Physics (AIP). 1974. Vol. 15, № 5. P. 524–534.

36. *Falsone G.* Cumulants and correlations for linear systems under non-stationary delta-correlated processes // Probabilistic Engineering Mechanics. 1994. Vol. 9, № 3. P. 157–165.

37. *Di Paola M., Falsone G.* Response correlations of linear systems with white noise linearly parametric inputs // IUTAM Symposium on Advances in Nonlinear Stochastic Mechanics / A. Naess, S. Krenk (eds.). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. P. 351–360.