ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ
Нелинейные динамические системы

Вып. 46 **Межвузовский сборник научных трудов** **2014**

УДК 539.5:519.21

И.Е. Полосков

Пермский государственный национальный исследовательский университет

Россия, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15
polosk@psu.ru; (342) 2-396-560

О ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ЛИНЕЙНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ БАЛКИ

В работе представлены схема и алгоритм решения задачи оценки характеристик стохастических линейных поперечных колебаний вязкоупругой балки для случая произвольного ядра. Использование разложения решения по синусам пространственной координаты позволило свести задачу анализа стохастического интегро-дифференциального уравнения в частных производных к исследованию системы обыкновенных стохастических интегро-дифференциальных уравнений для коэффициентов разложения, зависящих от времени. Для оценки первых моментных функций последних применяется модификация метода аппроксимации ядра, позволяющая построить цепочку систем обыкновенных дифференциальных уравнений для искомых моментов.

Ключевые слова: вязкоупругость, моделирование, балка, поперечные колебания, интегро-дифференциальное уравнение, стохастический анализ, моментные функции.

Работа выполнена в рамках проекта № 2014/153 базовой части государственного задания Минобрнауки России.

Введение

Модели в форме детерминированных и стохастических интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ, СИДУ), обыкновенных и в частных производных, интересны как с теоретической, так и практической точек зрения вследствие того, что эти уравнения описывают значительное число явлений в различных областях, в частности, в теории колебаний с учетом наследственности материала [1], аэроавтоупругости [2], вязкоупругости [3] и др. Общая теория и первичная классификация детерминированных интегро-дифференциальных уравнений была разработана Вито Вольтерра [4] в первой половине XX в. Некоторые современные общие приложения ИДУ рассмотрены в [5].

Системы обыкновенных СИДУ в стохастической механике часто возникают как результат применения таких методов, как метод конечных элементов (МКЭ) [6], метод конечных разностей (МКР) [7], метод Галеркина [8], метод прямых [9], разложение неизвестных функций по собственным функциям краевой задачи [10, 11] или каким-либо специальным функциям [12], к СИДУ в частных производных (СИДУвЧП) [13], которые описывают непрерывные вязкоупругие среды. После преобразования ИДУвЧП или СИДУвЧП в обыкновенные ИДУ или СИДУ зависящая от времени структура ядер в обыкновенных детерминированных или стохастических интегро-дифференциальных уравнениях движения сохраняется.

Ниже представлены схема и алгоритм расчетов решения задачи оценки характеристик стохастических линейных поперечных колебаний вязкоупругой балки для случая произвольного ядра. Использовании разложения решения по синусам пространственной координаты позволяет свести задачу анализа стохастического интегро-дифференциального уравнения в частных производных к исследованию системы обыкновенных СИДУ для коэффициентов разложения, зависящих от времени. Для оценки первых моментных функций последних применяется модификация метода аппроксимации ядра [14], позволяющая построить цепочку систем обыкновенных дифференциальных уравнений для искомых моментов.

1. ИДУ в частных производных, описывающее детерминированные колебания

При выводе уравнения поперечных колебаний балки предполагается [15], что в недеформированном состоянии упругая ось балки прямолинейна и совпадает с линией центров тяжести поперечных ее сечений. Эта прямолинейная ось принимается за координатную ось. От нее идет отсчет отклонений элементов балки при поперечных колебаниях. При этом считается, по крайней мере в первом приближении, что отклонения отдельных точек оси балки происходят перпендикулярно прямолинейному, недеформированному ее направлению, пренебрегая смещениями этих точек, параллельными оси OX. Далее, мы предполагаем, что отклонения точек оси стержня при поперечных колебаниях происходят в одной плоскости (плоскость колебаний) и являются малыми отклонениями в том смысле, что возникающие при этом восстанавливающие силы остаются в пределах пропорциональности. При таких предположениях отклонения точек оси стержня при поперечных колебаниях однозначно определяются одной функцией двух переменных – координаты x и времени t: $u = u(x,t)$. Эта функция удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению в частных производных четвертого порядка, которое может быть построено на основе из следующих соображений.

Пусть на балку действует распределенная поперечная нагрузка, интенсивность которой мы обозначим через $q(x,t)$, а также продольная сила (растягивающая или сжимающая), направленная по оси балки с интенсивностью $p(x,t)$. Эти нагрузки могут зависеть не только от положения элементов балки, но и от времени. Тогда кинетическая энергия колеблющейся бадки складывается из кинетической энергии поперечных смещений элементов стержня и кинетической энергии вращений элементов стержня вокруг осей, перпендикулярных плоскости колебаний. Потенциальная энергия будет равна сумме трех слагаемых: а) потенциальной энергии упругой деформации (работа восстанавливающих упругих сил); б) потенциальной энергии прогиба от поперечной нагрузки $\bar{q}(x,t)$; в) потенциальной энергии растяжения от продольной силы $\bar{p}(x,t)$.

Тогда уравнение поперечных колебаний балки может быть получено, если составить для функционала Остроградского–Гамильтона уравнение Эйлера [15]

$$m(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(E\,I\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big) - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\bar{p}\,\frac{\partial u}{\partial x}\Big) -$$

$$- \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\Big(I_0 \, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\Big) = \bar{q}(x,t), \qquad (1)$$

где $m(x)$ [кГ·с^2/см^2] – масса единицы длины балки, $E\,I$ – жесткость на изгиб (E [кГ/см^2] – модуль упругости, I [см^4] – момент инерции поперечного сечения балки относительно нейтральной оси сечения, перпендикулярной плоскости колебаний), I_0 [кГ·см] – момент инерции единицы длины стержня относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости колебаний.

ДУ (1) – линейное уравнение четвертого порядка, составленное при самых общих предположениях относительно действующих на стержень сил, жесткости и распределения массы.

Если дополнительно учесть наличие внешнего трения, внутреннего трения по закону Фойхта [16]

$$d^2 \, \frac{\partial^5 u}{\partial^4 x \, \partial t}, \qquad d = \sqrt{\frac{k_0 \, I}{\rho \, S}}, \qquad (2)$$

вязкоупругость материала балки, зависимость силы P только от времени, постоянство m, $E\,I$ и I_0, а также наличие сплошного упругого основания (модель Винклера), то уравнение для поперечных колебаний вязкоупругой балки длины L, сжатой продольной силой $p(t)$ и находящейся под действием внешней распределенной нагрузки $q(x,t)$ имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + 2\,\alpha \, \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \beta^2 \, u(x,t) + p(t) \, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \\ + c^2 \, \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} - I_0 \, \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} = \gamma \int\limits_0^t R(t,\tau) \, \frac{\partial^4 u(x,\tau)}{\partial x^4} \, d\tau - \\ - d^2 \, \frac{\partial^5 u(x,t)}{\partial^4 x \, \partial t} + q(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \qquad (3)$$

где $R(t,\tau) \geqslant 0$ – ядро, определяющее наследственные свойства матермала, α, β, γ, c, d – положительные постоянные,

$$c = \sqrt{\frac{E\,I}{\rho\,S}}.$$

В качестве начальных и граничных будем использовать такие условия:

$$u(x,0) = \bar{u}_1(x), \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \bar{u}_2(x), \quad 0 < x < L, \tag{4}$$

$$u(0,t) = \left.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=0} = 0, \qquad u(L,t) = \left.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=L} = 0 \tag{5}$$

(концы балки шарнирно закреплены), где $\bar{u}_1(x)$, $\bar{u}_2(x)$ – известные функции x.

2. Построение системы СИДУ

Для анализа стохастических поперечных колебаний вязкоупругой балки уравнение и начально-краевые условия при наличии случайных внешней распределенной нагрузки и осевой силы должны быть записаны так:

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} + 2\,\alpha\,\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + \beta^2\,U(x,t) + P(t)\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} +$$
$$+ c^2\,\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} - I_0\,\frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} = \gamma \int\limits_0^t R(t,\tau)\,\frac{\partial^4 U(x,\tau)}{\partial x^4}\,d\tau -$$
$$- d^2\,\frac{\partial^5 U(x,t)}{\partial^4 x\,\partial t} + Q(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \tag{6}$$

$$U(x,0) = \bar{U}_1(x), \qquad \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \bar{U}_2(x), \quad 0 < x < L, \tag{7}$$

$$U(0,t) = \left.\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=0} = 0, \quad U(L,t) = \left.\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=L} = 0. \tag{8}$$

где $\bar{U}_1(x)$, $\bar{U}_2(x)$ – стационарные случайные поля с известными характеристиками.

Будем считать, что поле $Q(x,t)$ можно представить в виде

$$Q(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} Q_k(t)\,\sin\omega_k\,x, \qquad \omega_k = \frac{\pi\,k}{L} \tag{9}$$

(это соответствует случайному возбуждению амплитуд гармоник этого поля). При этом решение задачи (6)–(8) будем искать в виде ряда

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} U_k(t) \sin\omega_k x. \tag{10}$$

Подставляя ряды (9), (10) в уравнение (6) и приравнивая коэффициенты при синусах с одинаковыми аргументами, для определения случайных функций $U_k(t)$ получим следующую счетную систему СИДУ:

$$\begin{aligned}(1+\omega_k^2 I_0)\,\ddot{U}_k(t) + (2\,\alpha + d^2\,\omega_k^4)\,\dot{U}_k(t) + \\ + \left[\beta^2 + c^2\,\omega_k^4 - \omega_k^2\,P(t)\right] U_k(t) = \\ = \gamma\,\omega_k^4 \int\limits_0^t R(t,\tau)\,U_k(\tau)\,d\tau + \ Q_k(t), \quad k=1,2,..., \quad t>0,\end{aligned} \tag{11}$$

начальными условиями для которой будут соотношения

$$\begin{aligned} U_k(0) &= \frac{2}{L}\int\limits_0^L \bar{U}_1(x)\,\sin\omega_k x\,dx \equiv \tilde{U}_{1k}, \\ \dot{U}_k(0) &= \frac{2}{L}\int\limits_0^L \bar{U}_2(x)\,\sin\omega_k x\,dx \equiv \tilde{U}_{2k}, \end{aligned} \tag{12}$$

где $\tilde{U}_{1k}, \tilde{U}_{2k}$ – случайные величины, а краевые условия удовлетворяются автоматически. При этом соотношения для математического ожидания, ковариационной функции и дисперсии случайного поля $U(x,t)$ будут иметь следующий вид:

$$m_U(x,t) = \mathcal{E}[U(x,t)] = \sum_{k=1}^{+\infty} m_{Uk}(t)\,\sin\omega_k x, \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{UU}(x,t;y,t') = \mathcal{E}[\{U(x,t)-m_U(x,t)\}\{U(y,t')-m_U(y,t')\}] = \\ = \sum_{k,\ell=1}^{+\infty} \mathcal{C}_{k\ell}(t,t')\,\sin\omega_k x\,\sin\omega_\ell y,\end{aligned} \tag{14}$$

$$\mathcal{D}_{UU}(x,t) \equiv \mathcal{C}_{UU}(x,t;x,t) = \mathcal{E}\left[\{U(x,t)-m_U(x,t)\}^2\right] =$$

$$= \sum_{k,\ell=1}^{+\infty} \mathcal{D}_{k\ell}(t) \sin\omega_k x \sin\omega_\ell x, \tag{15}$$

где
$$\mathcal{C}_{k\ell}(t,t') = \mathcal{E}[\{U_k(t) - m_{Uk}(t)\}\{U_\ell(t') - m_{U\ell}(t')\}],$$

а $\mathcal{E}[...]$ – оператор математического ожидания.

Заметим, что уравнения системы (11) имеют одинаковую структуру и могут анализироваться независимо.

Если разделить обе части уравнения (11) на коэффициент при $\ddot{U}_k(t)$ и ввести обозначения:

$$U_{k1}(t) = U_k(t), \quad U_{k2}(t) = \dot{U}_k(t),$$
$$r_{k1} = (2\,\alpha + d^2\,\omega_k^4)\,r_{k4}, \quad r_{k2} = \left[\beta^2 + c^2\,\omega_k^4\right] r_{k4},$$
$$r_{k3} = (2\,\alpha + d^2\,\omega_k^4)\,r_{k4}, \quad r_{k4} = \frac{1}{1+\omega_k^2\,I_0}, \quad r_{k5} = \omega_k^2\,r_{k4},$$

то система (11) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\dot{U}_{k1}(t) = U_{k2}(t),\\
&\dot{U}_{k2}(t) = -r_{k1}\,U_{k2}(t) - r_{k2}\,U_{k1}(t) +\\
&\qquad + r_{k3}\int_0^t R(t,\tau)\,U_{k1}(\tau)\,d\tau + r_{k4}\,Q_k(t) + r_{k5}\,U_{k1}(t)\,P(t),\\
&k = 1,2,..., \quad t > 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

Получена счетная система обыкновенных СИДУ, которые будем трактовать как уравнения Стратоновича [12]. Несложно видеть, что эта система распадается на отдельные блоки, соответствующие каждому k. В следующем разделе рассматривается схема приближенного сведения (без задания структуры ядра) произвольного блока системы (16) к СДУ, основанная на процедуре расширения фазового пространства и являющаяся адаптацией алгоритма из работы [14].

3. Метод анализа СИДУ

Рассмотрим следующую систему СИДУ Стратоновича:

$$
\begin{aligned}
&\dot{Y}_1(t) = Y_2(t)),\\
&\dot{Y}_2(t) = \alpha(t)\,Y_1(t) + \beta(t)\,Y_2(t) + \gamma(t)\int\limits_{t_0}^{t}\mathcal{B}(t,\tau)\,Y_1(\tau)\,d\tau +\\
&\qquad + \rho(t) + \sum_{\ell=1}^{m}\mu_\ell(t)\,V_\ell(t) + \mu_0(t)\,Y_1(t)\,\circ\,\Xi_0(t),\\
&\dot{\boldsymbol{V}}(t) = \mathcal{H}(t)\,\boldsymbol{V}(t) + \mathcal{O}(t)\,\boldsymbol{\Xi}(t),\\
&t\in(t_0,T],\quad \boldsymbol{Y}(t_0)=\boldsymbol{Y}^0,\quad \boldsymbol{V}(t_0)=\boldsymbol{V}^0,
\end{aligned}
\tag{17}
$$

где t – время; $\boldsymbol{Y}(t)=\{Y_1(t),Y_2(t)\}^T$ – вектор состояния;

$$\boldsymbol{V}(t)=\{V_1(t),V_2(t),...,V_m(t)\}^T$$

– вектор нестационарных гауссовых процессов – случайных возмущений; начальные состояния $\boldsymbol{Y}(t_0)=\boldsymbol{Y}^0$ и $\boldsymbol{V}(t_0)=\boldsymbol{V}^0$ считаются случайными векторами с известными характеристиками; $\boldsymbol{\Xi}(t)=\{\Xi_1(t),\Xi_2(t),...,\Xi_p(t)\}^T$ и $\Xi_0(t)$ – вектор независимых стационарных случайных процесов типа белого шума с единичными интенсивностями и отдельный процесс такой же формы,

$$\mathcal{E}[\Xi_i(t)]=0,\quad \mathcal{E}[\Xi_i(t)\,\Xi_j(t')]=2\,\pi\,\delta_{ij}\,\mathbb{E}\,\delta(t-t'),\quad i,j=0,1,2,...,p;$$

T – символ транспонирования матриц; $\mathbb{E}$ – единичная матрица соответствующего порядка; δ_{ij} – символ Кронекера; $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака; $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\mathcal{B}(t,\tau)$, $\rho(t)$, $\mu_\ell(t)$ и $\mathcal{H}(t)=\{h_{ij}(t)\}$, $\mathcal{O}(t)=\{o_{ij}(t)\}$ – известные непрерывные функции времени; $m\geqslant 0$ – целое.

Разобьем отрезок $[t_0,T]$ точками $t_k=t_0+k\,h$, $k=0,\,1,\,2,\,...,$ M, $h=(T-t_0)/M$ так, чтобы с достаточной точностью на отрезке $[t_{k-1},t_k]$ $(k\geqslant 1)$ ядро $\mathcal{B}(t,\tau)$ можно было заменить на функцию (среднее значение) $\widehat{\mathcal{B}}_k(t)$, которую вычислим следующим образом:

$$\widehat{\mathcal{B}}_k(t)=\frac{1}{h}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\mathcal{B}(t,\tau)\,d\tau\approx\frac{1}{h}\,\frac{\Delta\tau}{3}\sum_{s=0}^{2L}c_s\,\mathcal{B}(t,\tau_{ks})=\frac{1}{6L}\sum_{s=0}^{2L}c_s\mathcal{B}(t,\tau_{ks})$$

(с точностью порядка $O(\Delta\tau)^4$), где

$$\tau_{ks}=t_k+s\cdot\Delta\tau,\quad s=0,1,...,2L,\quad h=2L\cdot\Delta\tau,\quad L\geqslant 1,$$

$$c_s = \begin{cases} 1, \text{ если } s = 0 \text{ или } 2L; \\ 4, \text{ если } s \text{ нечетно}; \\ 2, \text{ иначе}. \end{cases}$$

Таким образом, ядро $\mathcal{B}(t,\tau)$ представляется кусочно-постоянной по второму аргументу матрицей-функцией. В результате этого второе уравнение системы (17) приводится к виду

$$\begin{aligned} \dot{Y}_2(t) &= \alpha(t)\,Y_1(t) + \beta(t)\,Y_2(t) + \\ &+ \gamma(t)\Big[\sum_{k=1}^{\nu-1}\widehat{\mathcal{B}}_k(t)\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} Y_1(\tau)\,d\tau + \widehat{\mathcal{B}}_\nu(t)\int\limits_{t_{\nu-1}}^{t} Y_1(\tau)\,d\tau\Big] + \\ &+ \rho(t) + \sum_{\ell=1}^{m}\mu_\ell(t)\,V_\ell(t) + \mu_0(t)\,Y_1(t)\circ\varXi_0(t), \\ &\qquad t\in(t_{\nu-1},t_\nu], \quad \nu = 1,...,M. \end{aligned} \tag{18}$$

Введем новые случайные процессы:

$$\begin{gathered} Y_{k1}(t) = Y_1(t), \quad Y_{k2}(t) = Y_2(t), \quad \boldsymbol{V}_k(t) = \boldsymbol{V}(t), \\ Z_k(t) = \int\limits_{t_{k-1}}^{t} Y_{k1}(\tau)\,d\tau, \quad t\in(t_{k-1},t_k]. \end{gathered} \tag{19}$$

Тогда с учетом равенств (19) расширенная система (17), (18) принимает следующую форму:

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{\nu1}(t) &= Y_{\nu2}(t), \\ \dot{Y}_{\nu2}(t) &= \alpha(t)\,Y_{\nu1}(t) + \beta(t)\,Y_{\nu2}(t) + \\ &+ \gamma(t)\Big[\sum_{k=1}^{\nu-1}\widehat{\mathcal{B}}_k(t)\,Z_k(t_k) + \widehat{\mathcal{B}}_\nu(t)\,Z_\nu(t)\Big] + \\ &+ \rho(t) + \sum_{\ell=1}^{m}\mu_\ell(t)\,V_{\nu\ell}(t) + \mu_0(t)\,Y_{\nu1}(t)\circ\varXi_0(t), \\ \dot{\boldsymbol{V}}_\nu(t) &= \mathcal{H}(t)\,\boldsymbol{V}_\nu(t) + \mathcal{O}(t)\,\boldsymbol{\varXi}(t), \\ \dot{Z}_\nu(t) &= Y_{\nu1}(t), \end{aligned} \tag{20}$$

причем начальные условия для системы (20) определяются так:

$$\begin{gathered} Y_{\nu i}(t_{\nu-1}) = Y_{\nu-1,i}(t_{\nu-1}), \quad i = 1,2, \quad Z_\nu(t_{\nu-1}) = 0, \\ \boldsymbol{V}_\nu(t_{\nu-1}) = \boldsymbol{V}_{\nu-1}(t_{\nu-1}). \end{gathered} \tag{21}$$

Рассмотрим временно́й отрезок $[t_{\nu-1}, t_\nu]$ ($\nu \geqslant 0$) и построим системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для вектора математических ожиданий

$$\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{X}\nu}(t) = \begin{bmatrix} m_{\boldsymbol{X}\nu 1}(t) \\ m_{\boldsymbol{X}\nu 2}(t) \\ m_{\boldsymbol{X}\nu 3}(t) \\ \dots \\ m_{\boldsymbol{X}\nu, n+2}(t) \\ m_{\boldsymbol{X}\nu, n+3}(t) \\ \dots \\ m_{\boldsymbol{X}\nu, n+\nu+2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{Y\nu 1}(t) \\ m_{Y\nu 2}(t) \\ m_{\boldsymbol{V}\nu 1}(t) \\ \dots \\ m_{\boldsymbol{X}\nu n}(t) \\ m_{Z1}(t_1) \\ \dots \\ m_{Z\nu}(t) \end{bmatrix}$$

и матрицы ковариаций

$$\mathbb{C}_{\boldsymbol{X}\nu}(t) = \{\mathcal{C}_{\boldsymbol{X}\nu ij}(t)\} = \{\mathcal{C}_{\boldsymbol{X}\nu ji}(t)\} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{Y\nu 11} & \mathcal{C}_{Y\nu 12} & \mathcal{C}_{YV\nu 11} & \dots & \mathcal{C}_{YV\nu 1n} & \mathcal{C}_{YZ\nu 11} & \dots & \mathcal{C}_{YZ\nu 1\nu} \\ \mathcal{C}_{Y\nu 21} & \mathcal{C}_{Y\nu 22} & \mathcal{C}_{YV\nu 21} & \dots & \mathcal{C}_{YV\nu 2n} & \mathcal{C}_{YZ\nu 21} & \dots & \mathcal{C}_{YZ\nu 2\nu} \\ \mathcal{C}_{VY\nu 11} & \mathcal{C}_{VY\nu 12} & \mathcal{C}_{VV\nu 11} & \dots & \mathcal{C}_{VV\nu 1n} & \mathcal{C}_{VZ\nu 11} & \dots & \mathcal{C}_{VZ\nu 1\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{C}_{VY\nu n1} & \mathcal{C}_{VY\nu n2} & \mathcal{C}_{VV\nu n1} & \dots & \mathcal{C}_{VV\nu nn} & \mathcal{C}_{VZ\nu n1} & \dots & \mathcal{C}_{VZ\nu n\nu} \\ \mathcal{C}_{ZY\nu 11} & \mathcal{C}_{ZY\nu 12} & \mathcal{C}_{ZV\nu 11} & \dots & \mathcal{C}_{ZV\nu 1n} & \mathcal{C}_{ZZ\nu 11} & \dots & \mathcal{C}_{ZZ\nu 1\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{C}_{ZY\nu\nu 1} & \mathcal{C}_{ZY\nu\nu 2} & \mathcal{C}_{ZV\nu\nu 1} & \dots & \mathcal{C}_{ZV\nu\nu n} & \mathcal{C}_{ZZ\nu\nu 1} & \dots & \mathcal{C}_{ZZ\nu\nu\nu} \end{bmatrix}$$

вектора

$$\boldsymbol{X}_\nu(t) = \mathrm{col}\big(\,\boldsymbol{Y}_\nu(t), \boldsymbol{V}_\nu(t), \{Z_1(t_1), Z_2(t_2), \dots, Z_{\nu-1}(t_{\nu-1}), Z_\nu(t)\}^T\,\big),$$

имеющего размерность $N_\nu = 2 + m + \nu$. Первую из этих систем можно получить прямым усреднением уравнений (20):

$$
\begin{aligned}
&\dot m_{Y\nu 1}(t) = m_{Y\nu 2}(t),\\
&\dot m_{Y\nu 2}(t) = \alpha(t)\, m_{Y\nu 1}(t) + \beta(t)\, m_{Y\nu 2}(t) +\\
&\qquad + \gamma(t)\Big[\sum_{k=1}^{\nu-1}\widehat{\mathcal{B}}_k(t)\, m_{Zk}(t_k) + \widehat{\mathcal{B}}_\nu(t)\, m_{Z\nu}(t)\Big] +\\
&\qquad + \rho(t) + \sum_{\ell=1}^{m}\mu_\ell(t)\, m_{\boldsymbol{V}\nu\ell}(t),\\
&\dot{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{V}\nu}(t) = \mathcal{H}(t)\,\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{V}\nu}(t),\\
&\dot m_{Z\nu}(t) = m_{Y\nu 1}(t).
\end{aligned}
\tag{22}
$$

При этом начальные условия для компонент вектора математических ожиданий примут следующую форму:

$$
\begin{gathered}
m_{Y\nu i}(t_{\nu-1}) = m_{Y,\nu-1,i}(t_{\nu-1}), \quad i = 1,2, \quad m_{Z\nu}(t_{\nu-1}) = 0,\\
\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{V}\nu}(t_{\nu-1}) = \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{V},\nu-1}(t_{\nu-1}).
\end{gathered}
\tag{23}
$$

Вторая система уравнений имеет более сложную структуру. Для построения ее систему стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) для векторного случайного процесса $\boldsymbol{X}_\nu(t) = \{X_{\nu\ell}, \ell = \overline{1, N_\nu}\}^T$ запишем следующим образом:

$$
\dot{\boldsymbol{X}}_\nu(t) = \mathbb{A}_\nu(t)\,\boldsymbol{X}_\nu(t) + \boldsymbol{b}_\nu(t) + \mathbb{G}_{1\nu}(t)\,\boldsymbol{\Xi}(t) + \boldsymbol{g}_{2\nu}\, X_{\nu 1}(t)\circ \Xi_0(t), \tag{24}
$$

где

$$
\mathbb{A}_\nu(t) \equiv \big[a_{\nu ij}(t)\big] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0_m & 0_\nu\\ \alpha(t) & \beta(t) & \boldsymbol{\mu}(t) & \boldsymbol{\gamma}_\nu(t)\\ \boldsymbol{0}_m & \boldsymbol{0}_m & \mathcal{H}(t) & \mathbb{O}_{m\nu}\\ \boldsymbol{0}_{\nu-1} & \boldsymbol{0}_{\nu-1} & \mathbb{O}_{\nu-1,m} & \mathbb{O}_{\nu-1,\nu}\\ 1 & 0 & 0_m & 0_\nu \end{bmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{b}_\nu(t) = \begin{bmatrix} 0\\ \rho(t)\\ \boldsymbol{0}_m\\ \boldsymbol{0}_\nu \end{bmatrix}, \quad \mathbb{G}_{1\nu}(t) = \begin{bmatrix} 0_p\\ 0_p\\ \mathcal{O}(t)\\ \mathbb{O}_{\nu p} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{g}_{2\nu} = \begin{bmatrix} 0\\ \mu_0(t)\\ \boldsymbol{0}_m\\ \boldsymbol{0}_\nu \end{bmatrix};
$$

$$
\boldsymbol{\mu}(t) = \big[\mu_1(t)\ \mu_2(t)\ \ldots\ \mu_m(t)\big];
$$

$$\boldsymbol{\gamma}_\nu(t) = \big[\gamma(t)\ \widehat{\mathcal{B}}_1(t)\ \ \gamma(t)\,\widehat{\mathcal{B}}_2(t)\ \ \ldots\ \ \gamma(t)\,\widehat{\mathcal{B}}_\nu(t)\big];$$

$\mathbf{0}_s$, $\mathsf{0}_r$, $\mathbb{O}_{sr}$ – нулевые столбец, строка и матрица соответствующих размеров.

Уравнения (24) будем трактовать как СДУ в смысле Стратоновича. Поэтому с учетом структуры этих уравнений компоненты вектора сноса $\tilde{\boldsymbol{a}}_\nu = \{\tilde{a}_{\nu i}\}$ и матрицы диффузии $\mathbb{B}_\nu(t) = \{\tilde{b}_{\nu ij}(t)\}$ уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК–уравнения) могут быть найдены по формулам [12]:

$$\tilde{a}_{\nu i} = \sum_{\ell=1}^{N_\nu} a_{\nu i\ell}\, x_{\nu\ell} + b_{\nu i},$$

$$\mathbb{B}_\nu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathsf{0}_m & \mathsf{0}_\nu \\ 0 & \mu_0^2(t)\, x_{\nu 1}^2 & \mathsf{0}_m & \mathsf{0}_\nu \\ \mathbf{0}_m & \mathbf{0}_m & \mathcal{O}(t)\,\mathcal{O}^T(t) & \mathbb{O}_{m\nu} \\ \mathbf{0}_\nu & \mathbf{0}_\nu & \mathbb{O}_{\nu m} & \mathbb{O}_{\nu\nu} \end{bmatrix},$$

а само ФПК–уравнение для плотности вероятности $p_\nu(\boldsymbol{x}_\nu, t)$ вектора $\boldsymbol{X}_\nu(t)$ будет иметь вид:

$$\frac{\partial p_\nu}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N_\nu} \frac{\partial^2 \big(\tilde{b}_{\nu ij}\, p_\nu\big)}{\partial x_{\nu i}\, \partial x_{\nu j}} - \sum_{i=1}^{N_\nu} \frac{\partial \big(\tilde{a}_{\nu i}\, p_\nu\big)}{\partial x_{\nu i}}. \tag{25}$$

Отсюда компоненты матрицы ковариаций $\mathbb{C}_{\boldsymbol{X}\nu}(t)$ будут удовлетворять следующим уравнениям [12]:

$$\dot{\mathcal{C}}_{\boldsymbol{X}\nu ij}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^{N_\nu}} \big[(x_{\nu i} - m_{\boldsymbol{X}i})\, \tilde{a}_{\nu j}(\boldsymbol{x}_\nu, t) + (x_{\nu j} - m_{\boldsymbol{X}j})\, \tilde{a}_{\nu i}(\boldsymbol{x}_\nu, t) +$$

$$+ \tilde{b}_{\nu ij}(\boldsymbol{x}_\nu, t)\big]\, p_\nu(\boldsymbol{x}_\nu, t)\, d\boldsymbol{x}_\nu, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, N_\nu. \tag{26}$$

Учитывая блочную структуру матриц $\mathbb{A}_\nu(t)$ и $\mathbb{B}_\nu(t)$, можно получить уравнения для $\mathcal{C}_{\boldsymbol{X}\nu ij}(t) = \mathcal{C}_{\boldsymbol{X}\nu ji}(t)$ при конкретных i и j:

$$\dot{\mathcal{C}}_{Y\nu 11}(t) = \mathcal{C}_{Y\nu 12}(t),$$

$$\dot{\mathcal{C}}_{\boldsymbol{X}\nu 1, m+\nu+2}(t) = \mathcal{C}_{Y\nu 11}(t) + \mathcal{C}_{\boldsymbol{X}\nu 2, m+\nu+2}(t),$$

$$\dot{\mathcal{C}}_{Y\nu 12}(t) = \alpha(t)\,\mathcal{C}_{Y\nu 11}(t) + \beta(t)\,\mathcal{C}_{Y\nu 12}(t) + \sum_{\ell=1}^{m}\mu_\ell(t)\,\mathcal{C}_{\boldsymbol{X}\nu 1,\ell+2}(t) +$$

$$+\,\gamma(t)\left[\sum_{k=1}^{\nu-1}\widehat{\mathcal{B}}_k(t)\,\mathcal{C}_{\boldsymbol{X}\nu 1,m+k+2}(t) + \widehat{\mathcal{B}}_\nu(t)\,\mathcal{C}_{\boldsymbol{X}\nu 1,m+\nu+2}(t)\right] + \mathcal{C}_{Y\nu 22}(t),$$

$$\dot{\mathcal{C}}_{Y\nu 22}(t) = 2\Big\{\alpha(t)\,\mathcal{C}_{Y\nu 12}(t) + \beta(t)\,\mathcal{C}_{Y\nu 22}(t) + \sum_{\ell=1}^{m}\mu_\ell(t)\,\mathcal{C}_{\boldsymbol{X}\nu 2,\ell+2}(t) +$$

$$+\,\gamma(t)\left[\sum_{k=1}^{\nu-1}\widehat{\mathcal{B}}_k(t)\,\mathcal{C}_{\boldsymbol{X}\nu 2,m+k+2}(t) + \widehat{\mathcal{B}}_\nu(t)\,\mathcal{C}_{\boldsymbol{X}\nu 2,m+\nu+2}(t)\right]\Big\} +$$

$$+\,\mu_0^2(t)\left[\mathcal{C}_{Y\nu 11}(t) + m_{Y\nu 1}^2(t)\right],$$

$$\dot{\mathcal{C}}_{\boldsymbol{V}}(t) = \mathcal{H}(t)\,\mathcal{C}_{\boldsymbol{V}}(t) + \left[\mathcal{H}(t)\,\mathcal{C}_{\boldsymbol{V}}(t)\right]^T + \mathcal{O}(t)\,\mathcal{O}^T(t),$$

$$\dot{\mathcal{C}}_{\boldsymbol{X}\nu ij}(t) = 0 \qquad \text{для остальных } i \text{ и } j.$$

Начальные условия для этой системы уравнений принимают следующую форму:

$$\mathcal{C}_{Y\nu ij}(t_{\nu-1}) = \mathcal{C}_{Y,\nu-1,ij}(t_{\nu-1}), \qquad 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 2,$$

$$\mathcal{C}_{\boldsymbol{V}\nu}(t_{\nu-1}) = \mathcal{C}_{\boldsymbol{V},\nu-1}(t_{\nu-1}), \qquad \mathcal{C}_{\boldsymbol{X}\nu 1,m+\nu+2}(t_{\nu-1}) = 0,$$

$$\mathcal{C}_{\boldsymbol{X}\nu ij}(t_{\nu-1}) = \mathcal{C}_{\boldsymbol{X},\nu-1,ij}(t_{\nu-1}), \qquad \text{для остальных } i \text{ и } j.$$

Заключение

В работе для анализа стохастических линейных поперечных колебаний вязкоупругой балки с неразностным ядром, лежащей на сплошном упругом основании и возмущаемой случайными осевой продольной силой и внешней распределенной нагрузкой, применено сочетание приближенно-аналитического метода разложения смещения сечений балки из положения равновесия по синусам с кратными аргументами пространственной координаты и построенния цепочки линейных параметрических стохастических дифференциальных уравнений для коэффициентов разложения, полученных на основе модификации метода аппроксимации ядра. Данная цепочка затем была использована для вывода замкнутой последовательности систем обыкновенных дифференциальных уравнений для первых моментных функций (математическмх ожиданий и ковариаций) расширяющегося вектора состояния.

Библиографический список

1. *Нгуен Тиен Кхием.* Нелинейные колебания вязкоупругих пластин под действием стационарных случайных сжимающих сил // Прикладная механика. 1986. Т.22, № 12. С.115–118.

2. *Белоцерковский С.М., Кочетков Ю.А., Красовский А.А., Новицкий В.В.* Введение в аэроавтоупругость. М.: Наука, 1980. 384 с.

3. *Потапов В.Д.* Устойчивость движения стохастической вязкоупругой системы // Прикладная математика и механика. 1993. Т.57, вып.3. С.137–145.

4. *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 304 с.

5. *Grigoriev Y.N., Ibragimov N.H., Kovalev V.F., Meleshko S.V.* Symmetries of integro-differential equations with applications in mechanics and plasma physics. Dordrecht, Heidelberg: Springer Science+ Business Media, 2010. XIII, 305 p.

6. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 542 с.

7. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980. 536 с.

8. *Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И.* Вычислительные методы. М.: Наука, 1977. Т.2. 400 с.

9. *Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л.* Численные методы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 400 с.

10. *Филатов А.Н., Шарова Л.В.* Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 152 с.

11. *Potapov V.D.* Stability of stochastic elastic and viscoelastic systems. Chichester: John Wiley and Sons, 1999. XI, 275 p.

12. *Маланин В.В., Полосков И.Е.* Случайные процессы в нелинейных динамических системах. Аналитические и численные методы исследования. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. 160 с.

13. *Soize C., Poloskov I.* Time-domain formulation in computational dynamics for linear viscoelastic media with model uncertainties and stochastic excitation // Computers & Mathematics with Applications. 2012. Vol.64, № 11. P.3594–3612.

14. *Полосков И.Е.* О расчете первых моментов линейных интегро-дифференциальных систем с параметрическими возмущениями // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. ун-т. Пермь, 2006. Вып.38. С.133–142.

15. *Бабаков И.М.* Теория колебаний: учеб. пособие. 4-е изд., испр. М.: Дрофа, 2004. 591 с.

16. *Пановко Я.Г.* Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М.: Наука, 1960. 193 с.